Math. A.
217

Fiche

Mathesis. Statica et Mechanica
490.
Math. a. 217
Fiche
R

Anfangsgründe
der
reinen Mechanik,
die
zugleich die Anfangsgründe
der
reinen Naturwissenschaft sind;

von

Johann Schultz,
Königl. Hofprediger und ordentl. Professor der Mathematik.

Mit zwey Kupfertafeln.

Königsberg,
bey Friedrich Nicolovius.
1804.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Man nennt eine Wissenschaft eine reine, wenn sie auf lauter Principien a priori beruht. Bedarf sie hingegen zugleich empirischer Principien; so heißt sie eine angewandte. Die Mechanik oder Bewegungslehre gehört gleichfals zu den Wissenschaften, die sich in reine und angewandte eintheilen lassen. Der Begriff der Bewegung enthält nichts als die reinen Begriffe von Raum und Zeit, und den daraus zusammengesetzten Begriff der Geschwindigkeit. Nun ist zwar das Bewegliche selbst, oder die Materie ein Gegenstand, den wir bloß aus der Erfahrung kennen, und der Begriff der Bewegung gehört daher eigentlich nicht in die reine, sondern lediglich in die angewandte Geometrie. Allein da Raum und Zeit als bloße subjective Formen dessen, was in ihnen ist, schon den Begriff von einem Etwas in ihnen überhaupt, das wir Materie nennen, und dessen Oerter nicht, wie die Oerter des Raums, als unveränderlich, sondern als wechselnd gedacht werden können, in sich schließen; so kann man den Begriff einer Materie überhaupt, so fern man sie bloß als Etwas, das

seinen Ort im Raum verändern kann, d. i. bloß als etwas Bewegliches betrachtet, ohne weiter auf irgend etwas, was uns die Erfahrung von ihr lehrt, Rücksicht zu nehmen, völlig als einen reinen behandeln.

Derjenige Theil der Mechanik, welcher die Materie bloß als etwas Bewegliches behandelt, ohne auf irgend eine andere Qualität oder Kraft derselben zu sehen, heißt die Phoronomie. Derjenige Theil hingegen, der auf die Kräfte derselben Rücksicht nimmt, heißt die Dynamik. Also gehört die Phoronomie unstreitig zur reinen Mechanik, und muß daher in jedem System der Mechanik als Grundlage vorangehen. Was aber die Dynamik betrift, so kommt es darauf an, ob die Kräfte der Materie bloß aus der Erfahrung erkennbar sind, oder ob sich a priori aus ihrem bloßen Begriffe beweisen läßt, daß der Materie als Materie gewisse Kräfte ursprünglich beywohnen müssen. Im erstern Fall würde die Dynamik nicht mehr zur reinen, sondern schon zur angewandten Mechanik gehören, und da man vor 1786 von keinen andern Kräften der Materie wußte, als die man aus der Erfahrung herleitete; so war die Phoronomie der einzige Theil der Mechanik, der auf den Namen der reinen Mechanik mit Recht Anspruch machen konnte. Nachdem aber im erwähnten Jahre Kant in seinen metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissen-

schaft a priori bewiesen hatte, daß die Materie als Materie nothwendig zwey ursprüngliche Kräfte, nämlich Ausdehnungs- und Anziehungskraft besitzen muß; so gehört seitdem die Dynamik, so fern sie sich bloß auf diese beyden ursprünglichen Kräfte einschränkt, gleichfals zur reinen Mechanik, und da sich aus diesen, wie ich im zweyten Theile gezeigt habe, auch alle Grundgesetze der Bewegung, die man im strengsten Sinne die Mechanik nennt, imgleichen die Regeln zur Beurtheilung der Wahrnehmung der Bewegung, die man mit dem Namen der Phänomenologie belegt, herleiten lassen; so enthält die reine Mechanik nunmehr folgende vier Theile: die Phoronomie, Dynamik, eigentliche Mechanik und Phänomenologie.

Hiedurch ist nunmehr das Gebiet der reinen Mechanik so sehr erweitert worden, daß schon derjenige Theil derselben, der bloß die Elementarkenntnisse der reinen Mathematik voraussetzt, von nicht ganz kleinem Umfange ist, derjenige aber, der durch Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf dem Wege der höhern Analysis möglich ist, gar keine Grenzen kennt. Ich hoffe daher durch gegenwärtige Anfangsgründe, welche die ganze reine Elementarmechanik im Zusammenhange enthalten, dem Anfänger einen nicht unangenehmen Dienst zu leisten, um so mehr, da in den Lehrbüchern der mechanischen Wis-

senschaften diejenige, die unter dem Namen der Mechanik aufgeführt wird, gewöhnlich nichts weiter als eigentliche Statik ist, die bloß die Lehre vom Gleichgewicht der festen Körper enthält, von ihrer Bewegung aber nur beyläufig einige Bruchstücke mehrentheils aus der höhern Mechanik entlehnt beybringt. Um dem System der reinen Elementarmechanik die gehörige Vollständigkeit zu geben, habe ich daher nicht nur das ganze Fundament der physischen Astronomie, sondern auch die Theorie von der Oscillation der Pendeln, die man sonst nur durch die feinsten Kunstgriffe der höhern Analysis entwickelt, sehr kurz und leicht nach synthetischer Methode festgestellt.

Indessen interessiren gegenwärtige Anfangsgründe der reinen Mechanik nicht bloß den Mathematiker, sondern eben so sehr zugleich den Philosophen und vornehmlich den Naturforscher. Denn wenn man auf die Art sieht, wie sie bearbeitet worden; so wird man ohne Mühe erkennen, daß sie die Anfangsgründe der ganzen reinen Naturwissenschaft enthalten. Unter der Natur versteht man den Inbegriff aller existirenden sinnlichen Gegenstände, oder die ganze Sinnenwelt. Die Lehre von den Gegenständen unsers äußern Sinns heißt die Körperlehre, die von den Objecten unsers innern Sinnes die Seelenlehre. Also begreift die Naturlehre in weiterer Bedeutung nicht nur die Körperlehre,

sondern auch die Seelenlehre in sich. Im *engern* Sinne aber versteht man unter *Naturlehre* oder *Physik* bloß die Körperlehre. Soll nun diese nicht ein bloßes System empirischer Naturgesetze, mithin nicht bloße empirische Naturlehre, sondern wahre *Na-turwissenschaft* seyn; so muß sie nicht bloße aus der Erfahrung geschöpfte Naturgesetze, die nie strenge Nothwendigkeit und Allgemeinheit mit sich führen, sondern zugleich Principien a priori, d. i. solche ent-halten, die unabhängig von aller Erfahrung dieser vorhergehen, und sie erst möglich machen. Objective Principien a priori *aus bloßen Begriffen* hei-ßen *metaphysische*, solche hingegen, die nur durch *Construction* der Begriffe, d. i. durch Darstel-lung ihres Gegenstandes in einer *reinen* Anschau-ung möglich sind, *mathematische*. Nun hat es die Naturwissenschaft mit Gesetzen zu thun, die zum *Daseyn* der äußern Gegenstände gehören, das Da-seyn aber läßt sich bloß in einer empirischen, nicht aber in einer reinen Anschauung darstellen, folglich läßt sich der Begriff des Daseyns nicht construiren, mithin setzt die Naturwissenschaft zuerst Principien aus bloßen Begriffen, d. i. *metaphysische* Prin-cipien voraus. Ferner aber nennen wir die äußern Gegenstände *Materie* und verstehen unter dieser bloß das *Bewegliche* im Raum, folglich hat die Naturwissenschaft es eigentlich mit den nothwendigen

Gesetzen der Bewegung zu thun, und ist also im Grunde nichts anders, als die auf Principien a priori gegründete Mechanik. Der Begriff der Bewegung aber läßt sich völlig construiren, und ist daher mathematisch, mithin erfordert die Naturwissenschaft nicht nur metaphysische, sondern auch mathematische Principien, und es ist hieraus von selbst klar, daß in der Physik, als einer Lehre von bestimmten existirenden Naturobjekten, nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden kann, als darinn Mathematik anzutreffen ist, indem sich die Möglichkeit bestimmter Naturdinge gar nicht aus bloßen Begriffen, also nicht metaphysisch erkennen läßt, sondern wenn sie a priori erkannt werden soll, dieses bloß durch Construction ihrer Begriffe, also mathematisch geschehen muß. Also gehört zur Naturwissenschaft erstlich die Metaphysik der Natur, und zweytens die auf dieser gegründete Mechanik. Nun kann die Naturwissenschaft entweder auf lauter Principien a priori beruhen, oder zugleich empirische Principien enthalten. Im erstern Falle heißt sie die reine, im letztern die angewandte Naturwissenschaft.

Die mathematischen Principien der Naturwissenschaft stellte zuerst der große Newton in seinem unsterblichen Werke: Philosophiae naturalis principia mathematica in einer solchen Allgemein-

heit und Vortreflichkeit auf, als man es vor ihm kaum ahnden konnte. Allein die metaphysischen Principien derselben a priori zu beweisen, war man in seinem Zeitalter noch nicht im Stande. Da er aber ihre Unentbehrlichkeit einsahe; so war er, um ihnen nicht das Ansehen bloßer empirischer Sätze zu geben, genöthigt, sie als Axiome oder Postulate, von deren Wahrheit man sich auch ohne Beweis überzeugen könnte, voraus zu setzen. Was aber die Zurückstoßungs- und Anziehungskraft, die in der Naturwissenschaft gerade das Wichtigste sind, betrift; so konnte er weder a priori beweisen, noch als ein Axiom annehmen, daß sie nothwendige ursprüngliche Kräfte der Materie sind, und daß besonders die Wirkung der Anziehungskraft nach dem Quadrat der Entfernung abnimmt, sondern mußte das erstere unentschieden lassen, obgleich seine Behauptung, daß die Anziehungskraft der Masse proportional sey, deutlich lehrt, daß er dieselbe in der That für eine ursprüngliche Kraft der Materie gehalten hat, das letztere aber, das ein so äußerst wichtiges Gesetz der Natur ist, lediglich aus der Erfahrung herleiten, die, ob sie gleich, so weit wir die Natur kennen, die Richtigkeit desselben allgemein bestätigt, es doch immer noch ungewiß läßt, ob sich bey dieser Allgemeinheit nicht Ausnahmen finden können, die uns zur Zeit noch bloß unbekannt sind. Auf diese Art fehlte aus Mangel

der metaphysischen Naturprincipien gerade den wichtigsten Lehren seines vortreflichen Werks noch immer die vollkommene apodiktische Gewißheit, welche die eigentliche Naturwissenschaft mit sich führen muß.

Diesen Mangel ersetzte unser uns vor kurzem entrissene verewigte Kant, indem er jene metaphysischen Principien der Naturwissenschaft in seiner vorbenannten unsterblichen Schrift vollständig aufstellte, und durch diese feste Grundlage das Newtonsche Natursystem zu einer wahren apodiktisch gewissen Naturwissenschaft erhob. Denn gründet man Newtons Werk auf Kants metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft; so hat man die auf Metaphysik der Natur *) gegründete Mechanik,

*) Man hat seit kurzem behaupten wollen, daß Kants 1786 herausgekommene metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft die Metaphysik der Natur nicht enthalten, weil er 1787 in der zweyten Auflage seiner Critik d. r. V. Vorrede S. XLIII sagt, daß er mit der Zeit sparsam verfahren müsse, wenn er seinen Plan, die Metaphysik der Natur zu liefern, ausführen wolle. Nimmt man diese seine Erklärung, so wie sie da steht, blos für sich; so würde allerdings folgen, daß er damals noch keine Metaphysik der Natur geliefert, und daher letztere in seinen gedachten Anfangsgründen noch nicht enthalten seyn könne. Allein wäre dieses der Sinn seiner Erklärung; so würde sie nicht nur seinen vorigen Erklärungen geradezu widersprechen, sondern der ganze Inhalt seiner mehrgedachten Anfangsgründe würde sie schon von selbst widerlegen.

d. i. die eigentliche Naturwissenschaft. Da sowohl Newton als Kant einige Eigenschaften und

Denn in der Vorrede zu diesen sagt er S. XII zuerst mit dürren Worten, daß seine vollständige Zergliederung des Begriffs von einer Materie eine wirkliche Metaphysik der körperlichen Natur sey. Zweytens sagt er S. XIV ausdrücklich, er habe es auch deswegen für nöthig gehalten, die metaphysischen Constructionen von den mathematischen abzusondern, weil hier die Vollständigkeit der Metaphysik der körperlichen Natur zuversichtlich erwartet werden kann, und fügt S. XV hinzu: „Auch glaube ich diese metaphysische Körperlehre (und diese ist doch wohl nichts anders als die Metaphysik der körperlichen Natur!) so weit als sie sich immer nur erstreckt, vollständig erschöpft zu haben.“ Ja, daß er sie erschöpft habe, zeigt er unmittelbar darauf, indem er sie mit dem Schema der Vollständigkeit eines metaphysischen Systems, nämlich mit der Tafel der Kategorien vergleicht. Und dieses muß auch jedem Leser gedachter Anfangsgründe so einleuchten, daß wenn er daran zweifeln wollte, es ihm obliegen würde, einen auch noch so kurzen Grundriß einer Metaphysik der Natur nach Kants System zu entwerfen, die von derjenigen, die in jenen Anfangsgründen befindlich ist, verschieden wäre. Es ist also wohl kein Zweifel, daß Kant, laut der Vorrede zur Critik d. r. V. den Plan gehabt hat, noch eine ausführliche Metaphysik, die nicht nur die bereits gelieferte besondere Metaphysik der körperlichen Natur, oder des äußern Sinns, sondern auch die allgemeine des äußern und innern Sinns enthielte, die jener zum Grunde liegt, zu liefern, die man den bisherigen metaphysischen Lehrbüchern substituiren könnte.

Kräfte mitnehmen, auf die man ohne Erfahrung gar nicht kommen würde, z. B. die Begriffe von starren und flüßigen Körpern, und der Widerstand in letztern, die chymischen Kräfte, die Intussusception ꝛc.; so enthalten ihre Werke schon verschiedenes, was zur angewandten Naturwissenschaft gehört, mithin muß, wenn man die reine Naturwissenschaft, als Grundlage der angewandten, dieser als einen besondern Theil voranschicken will, alles dieses von ihnen abgesondert werden. Kant hofte am Ende der Vorrede s. metaph. Anf. d. N., daß, durch seinen Entwurf veranlaßt, mathematische Naturforscher es nicht unwichtig finden würden, den metaphysischen Theil mit der mathematischen Bewegungslehre in Vereinigung zu bringen. Dieses ist nun in gegenwärtigen Anfangsgründen der reinen Mechanik geschehen, indem sie nichts anders enthält als die auf Metaphysik der Natur gegründete reine Bewegungslehre, mithin nichts anders als die wahre reine Naturwissenschaft, folglich die nothwendige Grundlage der ganzen Physik, und, da sie bloß die Elementarmechanik enthält, das eigentliche Fundament von dem vorbenannten die höhere Mechanik enthaltenden unsterblichen Newtonschen Werke. Es könnte zwar scheinen, daß die Lehre von den elastischen und unelastischen, harten und weichen Körpern, imgleichen die Lehre von der Schwere der Körper, schon zur ange-

wandten Naturwissenschaft gehöre, weil wir alle jene Eigenschaften der Körper bloß aus Erfahrung kennen. Allein da die ursprüngliche Elasticität auf den Begriff der empirischen, und so auch der Härte und Weichheit von selbst führt, die Schwere aber als ursprüngliche Anziehungskraft der Erde behandelt worden, außerdem in allen diesen Lehren keine empirischen Principien zum Grunde gelegt worden, so behaupten diese Lehren mit Recht ihre Stelle in der reinen Naturwissenschaft. Da aber alle übrigen empirischen Eigenschaften der Materie, z. B. Cohäsion *), Starrheit, Flüßigkeit, Zerreibbarkeit, Magnetismus, Electricität, Galvanismus, Intussusception u. s. w. von der Art sind, daß wir ohne Erfahrung nicht einmal auf einen Begriff von ihnen kommen würden; so gehören diese durchaus bloß in die angewandte Naturwissenschaft, d. i. in die Physik. Und hieraus ist zugleich klar, daß gegenwärtige Anfangs-

*) Hr. D. Oersted glaubt zwar in seinen vom Hrn. D. Mendel herausgegebenen Ideen zu einer neuen Architektonik der Naturmetaphysik S. 26. 27., daß die Cohäsionskraft zum Wesen der Materie gehöre, und als Limitation der Anziehungs- und Abstoßungskraft, dieser beyden entgegengesetzten Grundkräfte der Materie, a priori deducirt werden könne. Allein nach meiner Einsicht ist diese Deduction unmöglich. Das höchste, was sich hieraus deduciren ließe, wäre bloße Berührung und Ausschließung leerer Räume, aber auch diese Deduction ist nicht einleuchtend genug.

gründe die reine Naturwissenschaft ganz vollständig enthalten, und keine anderweitige Lehre mehr in ihnen Statt findet.

Um die Vollständigkeit der darin enthaltenen Naturmetaphysik zu zeigen, habe ich bereits die Architektonik derselben nach der Tafel der Kategorien für den Philosophen beyläufig angemerkt. Indessen wird es zur bessern Uebersicht nicht undienlich, sie hier im Zusammenhange mitzutheilen.

Was nämlich die Materie oder das Bewegliche selbst betrift; so ist diese in Rücksicht der

Quantität, als ein Ausgedehntes, entweder ein Theil oder mehrere Theile, oder ein Ganzes (Körper).

Qualität, als bewegende Kraft, etwas Reales, Negatives und Begränztes. (Abschn. 4. Anmerk. 2.)

Relation: Substanz; jede ihrer Veränderungen Wirkung einer äußerlichen Ursache, alle Materien stehen durch Wechselwirkung in Gemeinschaft (§. 28. Anmerk.)

Modalität: in Ansehung ihrer nicht ursprünglichen Kräfte bloß möglich, als Gegenstand der Empfindung wirklich, und als Beharrliches oder Substanz nothwendig.

Was aber die Bewegung der Materie anlangt; so ist diese in Rücksicht der

Quantität, so fern die Materie als ein bloßer Punkt, und die Größe der Bewegung in einem und ebendemselben Punkt vereinigt gedacht wird, entweder eine, nämlich die einfache, oder ein Aggregat von mehreren d. i. eine aus einer unbestimmten Menge einzelner zusammengesetzte, oder Allheit von Bewegungen, d. i. eine aus einer bestimmten Zahl einzelner zusammengesetzte. Diese Bestimmungen der Quantität der Bewegung ziehe ich als die richtige denjenigen vor, die ich, mit Kant, in Ansehung der Richtung §. 28. Anmerk. gegeben habe. Indessen ist die auf diese Art bestimmte Quantität der Bewegung eigentlich nur eine Zahl von Bewegungen, und wenn man daher den bewegten Körper vollständig als etwas Ausgedehntes betrachtet, so wird die Quantität seiner Bewegung bloß durch die Quantität der bewegten Materie bestimmt. Sieht man hingegen auf die intensive Größe oder den Grad der Bewegung, so wird diese für jeden materiellen Punkt durch die Größe des Raums, den er in einer gegebenen Zeit zurücklegt, d. i. durch die Geschwindigkeit bestimmt.

Qualität, die bloß in ihrer Richtung besteht, affirmativ oder real, so fern sie immer dieselbe Richtung behält, negativ, so fern sie

nach direct entgegen gesetzten Richtungen gedacht wird, und begränzt, so fern sie nach indirect entgegen gesetzten Richtungen möglich ist (§. 28. Anmerk. 2.).

Relation: Accidenz der Materie, Wirkung einer äußerlichen Ursache, steht durch gegenseitige Mittheilung mit andern Bewegungen in Gemeinschaft (§. 28. Anm.).

Modalität: möglich, wenn sie geradlinigt ist (§. 69.), wirklich, wenn der Körper sich durch eine krumme Linie bewegt, die ganz außerhalb uns liegt (§. 70.) nothwendig, für denjenigen Körper, dessen Anziehungskraft kleiner ist, als die des andern (§. 71.).

Ich habe es für nöthig gefunden, in der Architektonik der Naturmetaphysik von der Kantischen in mehrern Stücken abzugehen, und überlasse es dem Leser, nicht nur die Vergleichung selbst anzustellen, sondern auch zu beurtheilen, ob ich hiezu Grund gehabt habe. Nur über einen Umstand halte ich nöthig, mich zu rechtfertigen. Ich habe die Lehre von der Masse der Körper und der Quantität ihrer Bewegung im dritten Abschnitte der Phoronomie vorgetragen. Kant hingegen macht ihr in dieser ihren Platz streitig, und weiset ihr ihre Stelle erst in der strenge so genannten Mechanik an, weil man sich die materiellen Punkte des Körpers erst als etwas denken

ken müsse, was durch seine Bewegung bewegende Kraft hat (metaph. Anfangsgr. S. 110.). Allein ich sehe gar nicht ein, warum man bey Schäzzung der Quantität der Bewegung durchaus auf die bewegende Kraft des Bewegten Rücksicht nehmen müßte, da man doch so gar bey Schätzung der intensiven Größe der Bewegung, die bloß in dem Grade der Geschwindigkeit besteht, von aller Kraft abstrahirt, und ihr daher ihre Stelle in der Phoronomie anweiset. Nach meiner Einsicht muß man bey Bestimmung der Größe der Bewegung eines Körpers von aller Kraft desselben durchaus abstrahiren, weil wir die Größe dieser Kraft erst umgekehrt aus der Größe der Bewegung, als ihrer Wirkung, erkennen können.

H. D. Fries rechnet es, in seinem Buche über Reinhold, Fichte und Schelling 1803. S. 128., Kant als einen Fehler an, daß er mit Newton behauptet, die ursprüngliche Anziehungskraft stehe nothwendig im Verhältnisse der Masse, das heißt mit der Quantität der Substanz, weil, nach seiner Meinung, es hiedurch unmöglich gemacht wird, andere Unterschiede, als die der specifischen Gewichte zu erklären. Allein wäre dieses ein wirklicher Fehler; so müßte man behaupten, die ursprüngliche Anziehungskraft wäre nicht eine ursprüngliche. Denn eine Kraft, die der Materie als Materie zukommt, so daß ohne sie

die Materie unmöglich würde, muß nothwendig allen Materien ohne Unterschied in gleichem Grade zukommen, so daß eine gleiche Menge Materie auch zugleich beständig einen gleichen Grad derselben ursprünglichen Kraft besitzen muß. Also ist es ein absolut nothwendiger allgemeiner Satz: jede ursprüngliche Kraft der Materie ist der Masse proportional, und gilt nicht nur von der ursprünglichen Anziehungskraft, sondern auch von der ursprünglichen Elasticität. In Ansehung der ursprünglichen Kräfte findet also bey der Materie kein Unterschied statt, sondern dieser beruht lediglich auf Kräften, die der Materie nicht nothwendig zukommen, sondern als zufällige anzusehen sind.

Einleitung

Vom Objekt der Mechanik.

Erklärung 1.

§. 1. Die Veränderung des Orts heißt **Bewegung**. Das Bleiben in demselben Orte heißt **Ruhe**. Das Bewegliche heißt **Materie**, und Materie als ein Ganzes betrachtet, heißt ein **physischer Körper**, oder schlechthin ein **Körper**.

Zus. 1. Da jeder Ort eine Stelle im Raum, und sowohl jede Veränderung, als jedes Bleiben nur in der Zeit denkbar ist; so setzt sowohl der Begriff der Bewegung als der Ruhe die Begriffe von **Raum** und **Zeit** voraus, und Materie und Körper sind also bloß im Raum möglich.

Zus. 2. Jede Bewegung ist **stetig**. Denn die Veränderung des Orts besteht darinn, daß der Körper im jetzigen Augenblick an einem andern Orte ist, als er im verflossenen war. Nun aber ist, weil sowohl der Raum als die Zeit stetig ist, zwischen zwey Oertern allemal ein Zwischenraum, und zwischen zwey Augenblicken allemal eine Zeitdauer. Also besteht die Bewegung eines Körpers darinn,

daß er von dem Orte, wo er Anfangs war, *succeſſiv* durch alle Oerter rückt, die zwiſchen ihm und dem andern Orte liegen, d. i. die Bewegung des Körpers iſt eben ſo ſtetig, als der Raum, den er durchläuft, und die Zeit, in welcher dieſes geſchieht.

Zuſ. 3. Alſo iſt in einem bloßen *Punkte* des Raums und in einem bloßen *Augenblick* keine Bewegung möglich.

Zuſ. 4. Da die Materie bloß im Raum möglich (Z. 1.), der Raum aber ausgedehnt iſt; ſo iſt auch die Materie und jeder Körper *ausgedehnt*, und daher *theilbar*.

Zuſ. 5. Da wir ſowohl das, was im Raum iſt, als das was in ihm geſchieht, bloß durch *äußere Wahrnehmung* kennen; ſo iſt ſowohl die Materie und jeder Körper, als jede Bewegung und Ruhe ein *Gegenſtand unſerer äußern Wahrnehmung*, mithin eine Bewegung, von welcher keine äußere Wahrnehmung möglich iſt, ein Unding.

Erklärung 2.

Der ganze unendliche Raum und jeder Ort in ihm, ſo fern er an ſich unveränderlich beſtimmt und daher unbeweglich iſt, heißt der *abſolute Raum*, und jeder Ort in ihm ein *abſoluter Ort*. Die Veränderung des abſoluten Orts heißt die *abſolute Bewegung*, und das Bleiben im abſoluten Orte heißt die *abſolute Ruhe* des Körpers. Betrachten wir hingegen den Ort, in welchem wir einen Körper wahrnehmen, bloß in Beziehung gegen die Oerter, in welchen wir andere Körper wahrnehmen,

so heißt derselbe der relative Ort des Körpers, der Raum, so fern seine Oerter bloß als relative betrachtet werden, heißt alsdann der relative Raum, die Veränderung des relativen Orts eines Körpers, heißt seine relative Bewegung, und sein Bleiben im relativen Orte heißt seine relative Ruhe.

Zus. 1. Die absolute Ruhe oder Bewegung eines Körpers kann gar nicht wahrgenommen werden. Denn der Raum für sich und jeder absolute Ort desselben ist gar kein Gegenstand der Wahrnehmung, sondern muß vielmehr in unserer Vorstellung schon vorausgesetzt werden, wenn äußere Wahrnehmung möglich werden soll. Also läßt es sich schlechterdings nicht wahrnehmen, ob ein Körper in seinem absoluten Orte bleibt oder ihn verändert.

Zus. 2. Also ist eine absolute Ruhe oder Bewegung ein Unding (§. 1. Z. 5.), mithin ist keine andere Bewegung und Ruhe möglich, als eine relative, und die Bewegung und Ruhe der Körper besteht also bloß darinn, daß sie ihre äußern Verhältnisse gegen einander, nämlich ihre Lage gegen einander verändern, oder beybehalten.

Zus. 3. Der relative Raum, in welchem wir die Körper wahrnehmen, ist an sich betrachtet nichts anders, als ein Theil des absoluten Raums, in welchem alle mögliche Körper und alle ihre Veränderungen, sie mögen in Ruhe oder in Bewegung seyn, schlechterdings gedacht werden müssen; und er heißt daher bloß so fern relativ, weil wir nur in diesem Theile des Raums die äußern Verhältnisse der Körperwelt wahrnehmen können, indem er uns durch

die materiellen Dinge, die in ihm sind, **empirisch bezeichnet** wird, daher kann man ihn in dieser Rücksicht auch den **materiellen** oder **empirischen Raum** nennen.

Zus. 4. Da uns also der relative Raum durch die materiellen Gegenstände empirisch bezeichnet wird, und daher für uns wahrnehmbar ist (Z. 3.); so können wir uns denselben beliebig auch als beweglich vorstellen, ob er gleich für sich als absoluter Raum unbeweglich ist. z. B. wenn ich in der Cajüte eines Schiffs, das vom Ufer wegsegelt, mit dem Rücken nach dem Fenster stehe, so ist der eingeschränkte Raum der Cajüte der relative Raum, in welchem allein ich die Bewegung und Ruhe wahrnehmen kann, und wenn ich die Bewegung des Schiffs nicht empfinde, und ich sehe eine Kugel von der andern Seite der Cajüte mir entgegen rollen; so sage ich: ich bin in Ruhe, und die Kugel bewegt sich. Sehe ich aber aus dem Fenster der Cajüte nach dem Ufer; so erweitert sich hier mein relativer Raum, und ich betrachte nun das Ufer als ruhend, mich aber und die Cajüte, wegen meiner veränderten Lage gegen das Ufer, als bewegt. Gesetzt nun, das Schiff bewegte sich vom Ufer eben so geschwinde weg, als die Kugel in der Cajüte sich nach demselben bewegt; so würde ich sagen: die Kugel ist in meinem jetzigen relativen Raum in Ruhe geblieben, indem sich ihre Lage gegen das als ruhend betrachtete Ufer gar nicht geändert hätte.

Erklärung 3.

§. 3. Die Bewegung eines Körpers heißt gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten auch immer gleiche Räume durchläuft, ungleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten ungleiche Räume durchläuft.

Erklärung 4.

§. 4. In bloß mechanischer Bedeutung heißt ein Körper ein fester, wenn seine Theile so zusammenhangen, daß sie sich weder während seiner Ruhe, noch während seiner Bewegung von einander trennen, und daher immerfort eben dieselbe Lage gegen einander behalten.

Zus. 1. Wenn daher ein fester Körper in Ruhe ist, so sind alle Punkte seiner Materie in Ruhe, und wenn er sich bewegt, so bewegen sich alle Punkte seiner Materie mit einander parallel.

Zus. 2. Wenn umgekehrt ein Punkt des festen Körpers in Ruhe ist; so sind sie alle in Ruhe, und wenn ein Punkt desselben sich bewegt; so bewegen sie sich alle mit einander parallel.

Zus. 3. Also kann man bey den festen Körpern in Rücksicht ihrer Bewegung und Ruhe von ihrer Ausdehnung gänzlich abstrahiren, und den festen Körper als einen bloßen Punkt, und den von ihm durchlaufenen Raum als eine bloße Linie betrachten.

Anmerkung.

Es könnte zwar scheinen, daß der erste und zweyte Zusatz nicht allgemein richtig wäre, sondern nur bey der fortschreitenden Bewegung, keineswegs aber bey der Axen-

drehung Statt fände, indem bey dieser die Axe selbst in Ruhe bliebe. Allein letzteres gilt zwar von geometrischen Körpern, die nichts anders als einen Theil des absoluten Raums bedeuten, ohne irgend darauf zu sehen, ob Materie darinn vorhanden sey oder nicht. Denn da dieser unbeweglich ist; so ist das Drehen desselben eine bloß imaginaire Vorstellung, und da hier die Axe eine geometrische Linie ist, deren Punkte alle unausgedehnt sind; so läßt sich kein Drehen derselben, auch nicht einmal in der Imagination, vorstellen, mithin ist man hier gezwungen, sich sowohl die Axe in Beziehung aller in der Imagination gedachten Punkte eines geometrischen Körpers und einer geometrischen Fläche, als auch den Punkt, um welchen man sich die Umdrehung einer Linie imaginirt, in Beziehung auf diese als ruhend zu denken. Bey physischen Körpern hingegen ist ein materieller unausgedehnter Punkt, mithin auch eine solche Punkte enthaltende Linie ein Widerspruch, folglich ist jeder Punkt einer materiellen Linie materiell und ausgedehnt, und da bey einem festen Körper jeder Punkt während der Bewegung als von allen übrigen unzertrennlich und gegen sie immer dieselbe Lage behaltend gedacht wird; so kann auch bey der Axendrehung des Körpers kein materieller Punkt in Ruhe bleiben, sondern muß sich, und daher auch seine Axe, eben so wie jeder andere Punkt mitdrehen.

Erklärung 5.

§. 5. Die Wissenschaft von der Bewegung der festen Körper heißt die Mechanik.

Zus. 1. Also kann man man in der Mechanik jeden Körper als einen bloßen Punkt, und den von ihm durchlaufenen Raum als eine bloße Linie ansehen (§. 4. Z. 3.)

Zus. 2. Da jede Bewegung entweder gleichförmig, oder ungleichförmig ist (§. 3.); so theilt sich die Mechanik in zwey Haupttheile, nämlich: in die Lehre von der gleichförmigen, und in die Lehre von der ungleichförmigen Bewegung.

Erster Theil der Mechanik.

Von der gleichförmigen Bewegung.

Erster Abschnitt.

Von der gleichförmigen Bewegung überhaupt.

Lehrsatz 1.

§. 6. In der gleichförmigen Bewegung verhalten sich die Räume, wie die Zeiten, in welchen sie durchlaufen sind, d. i. wenn ein Körper in der Zeit T den Raum S, und in der Zeit t den Raum s durchläuft; so ist $S : s = T : t$

Beweis. Denn da der Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft (§. 3.); so durchläuft er in einer 2 mal größern Zeit einen 2 mal größern Raum, in einer 3 mal größern Zeit einen 3 mal größern Raum, und überhaupt in einer n mal größern Zeit einen n mal größern Raum. Also verhalten sich die Räume, wie die Zeiten (Arithmet. §. 119).

Zus. 1. Also ist in der gleichförmigen Bewegung das Product aus dem Raum des einen Körpers in die Zeit des andern dem Product aus dem Raum des andern in die Zeit des erstern gleich, d. i. $St = sT$.

Zus. 2. Wenn man daher den Raum s, den der Körper in der Zeit t durchläuft, zum Maaß aller übrigen annimmt, und $s = 1$, $t = 1$ setzt; so ist jeder andere Raum der Zeit gleich, in welcher er ihn durchläuft, d. i. $S = T$ (Z. 1.) z. B. wenn der Körper in einer Zeitsecunde eine Ruthe durchläuft; so durchläuft er in 12 Secunden 12 Ruthen.

Erklärung 6.

§. 7. Unter der Geschwindigkeit versteht man die Größe des Raums, den ein Körper in einer gegebenen Zeit gleichförmig durchläuft. Man nimmt nämlich einen bekannten kleinen Zeittheil, z. B. eine Secunde, beliebig an, und bestimmt die Geschwindigkeit durch den Raum, den er in diesem Zeittheil gleichförmig durchläuft, z. B. wenn der Körper in jeder Secunde 20 Fuß durchläuft; so sagt man: er hat eine Geschwindigkeit von 20 Fuß.

Zus. 1. Wenn daher ein Körper sich gleichförmig bewegt, so läuft er immer gleich geschwinde, und wenn er immer gleich geschwinde läuft; so ist seine Bewegung gleichförmig (§. 3.)

Zus. 2. Wenn also zwey Körper sich gleichförmig und dabey gleichgeschwinde bewegen; so verhalten sich die Räume wie die Zeiten der Bewegung, d. i. $S : s = T : t$ (§. 6.)

Zus. 3. Wenn ein Körper in einer n mal größern Zeit einen n mal größern Raum gleichförmig durchläuft, als ein anderer; so bewegt er sich n mal geschwinder, als dieser (§. 3.).

Zus. 4. Also verhalten sich in der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeiten, wie die Räume, die in eben der Zeit durchlaufen würden (Ar. §. 119.), d. i. wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit C den Raum S in eben der Zeit gleichförmig durchläuft, in welcher ein anderer mit der Geschwindigkeit c den Raum s gleichförmig zurücklegt; so ist $C : c = S : s$.

Lehrsatz 2.

§. 8. Wenn zwey Körper sich gleichförmig bewegen; so sind die Räume, die sie durchlaufen, im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Geschwindigkeiten und der Zeiten, in welchen sie sich bewegen, d. i. wenn der eine Körper mit der Geschwindigkeit C in der Zeit T den Raum S, und der andere mit der Geschwindigkeit c in der Zeit t den Raum s durchläuft; so ist $S : s = \left(\begin{matrix} C : c \\ T : t \end{matrix}\right)$.

Beweis. Denn man setze, ein dritter Körper durchlaufe gleichförmig mit der Geschwindigkeit C des ersten in der Zeit t des zweyten den Raum σ; so ist

$S : \sigma = T : t$ (§. 7. Z. 2.).

und $\sigma : s = C : c$ (§. 7. Z. 4.),

also $S : s = \left(\begin{matrix} C : c \\ T : t \end{matrix}\right)$ (Ar. §. 126. Z. 1).

Zus. 1. Wenn man daher die Verhältnisse der Geschwindigkeiten und Zeiten durch Zahlen ausdrückt; so verhalten sich in der gleichförmigen Bewegung zweyer Körper die durchlaufenen Räume, wie die Producte aus ihren Geschwindigkeiten in die Zeiten ihrer Bewegung, d. i. $S : s = CT : ct$ (Arithm. §. 127.), z. B. wenn der eine Körper in jeder Secunde 8, und der andere 3 Fuß durchläuft, und der erstere 9, der letztere 2 Stunden in Bewegung ist; so ist $S : s = 72 : 6 = 12 : 1$ d. i. der erstere hat einen 12mal größern Raum zurückgelegt, als der zweyte.

Zus. 2. Wenn die Räume gleich sind; so verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten, und wenn die Geschwindigkeiten sich so verhalten; so sind die Räume gleich. Denn wenn $S = s$ ist, so ist $CT = ct$ (Z. 1.), also $C : c = t : T$, und wenn $C : c = t : T$ ist; so ist $CT = ct$, also $S = s$ (Z. 1.). Z. B. wenn der eine Körper in jeder Secunde 5, der andere nur 3 Fuß durchläuft, der erste aber nur 3, der zweyte hingegen 5 Stunden in Bewegung ist; so sind ihre durchlaufenen Räume gleich, und wenn diese gleich sind; so muß, wenn die Geschwindigkeit des ersten zu der des zweyten sich wie 5 : 3 verhält, die Zeit des ersten zur Zeit des zweyten sich wie 3 : 5 verhalten.

Zus. 3. Wenn man die Bewegung des zweyten Körpers zur Einheit annimmt; so daß der Raum welchen der erste durchläuft Smal, seine Geschwindigkeit Cmal, und die Zeit Tmal größer ist, als

bey dem andern; so ist sein Raum S so viel mal größer, als das Product der Zahlen C, T beträgt, das heißt: es ist: S = CT. Denn in diesem Fall ist s = 1, c = 1, t = 1, also S = CT (Z. 1.) z. B. wenn der erste Körper sich 5 mal geschwinder und 7 mal länger, als der zweyte bewegt; so durchläuft er einen 35 mal größern Raum, als der zweyte. Dieses ist der wahre Sinn des Satzes: In der gleichförmigen Bewegung bekommt man den Raum wenn man die Geschwindigkeit durch die Zeit multiplicirt, mithin der wahre Sinn des Ausdrucks S = CT.

Zus. 4. Also bekommt man in der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit, wenn man den Raum durch die Zeit dividirt, und die Zeit, wenn man den Raum durch die Geschwindigkeit dividirt, d. i. $C = \frac{S}{T}$, und $T = \frac{S}{C}$ (Z. 3.) z. B. wenn der eine Körper in einer 3mal längern Zeit einen 12mal größern Raum durchläuft, als ein anderer; so bewegt er sich 4mal geschwinder, und wenn er mit einer 4mal größern Geschwindigkeit einen 12mal größern Raum durchläuft, als ein anderer, so braucht er eine 3mal längere Zeit, als dieser.

Zweyter Abschnitt.

Von der einfachen und zusammengesetzten Bewegung.

Erklärung 7.

§. 9. Eine Bewegung heißt geradlinigt, wenn sie immerfort nach einerley Richtung geschieht, krummlinigt, wenn ihre Richtung sich jeden Augenblick ändert. Eine Bewegung heißt einfach, wenn sie nur als eine einzige betrachtet wird, hingegen zusammengesetzt, wenn zwey oder mehrere Bewegungen in demselben Körper vereinigt als eine einzige betrachtet werden.

Zus. 1. Also ist jede einfache Bewegung geradlinigt. Denn ist eine Bewegung nicht geradlinigt, so hat sie verschiedene Richtungen, also ist sie schon für sich als eine aus mehrern geradlinigten zusammengesetzte anzusehen.

Zus. 2. Jede krummlinigte Bewegung ist eine zusammengesetzte. Denn da sie ihre Richtung jeden Augenblick ändert; so ist sie als aus unendlich vielen zusammengesetzt zu betrachten.

Zus. 3. Die Wahrnehmung einer geradlinigten Bewegung ist ganz dieselbe, man mag den Körper als bewegt, und den relativen Raum als ruhig, oder man mag den Körper als ruhig, und dagegen den relativen Raum mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung bewegt annehmen.

Denn die Wahrnehmung der Bewegung ist bloß im relativen Raum möglich (§. 2. Z. 2.), und dieser läßt sich nach Belieben als ruhig oder als beweglich ansehen (§. 2. Z. 4.). Man setze also (Fig. 1.) der relative Raum sey ruhend, und der Körper A durchlaufe in ihm die gerade Linie AB; so sehen wir ihn den materiellen Dingen, die am Orte B sind, immer näher rücken, und endlich erblicken wir ihn bey ihnen am Orte B selbst. Allein nehmen wir umgekehrt den Körper A als ruhend an, und lassen, statt dessen, den relativen Raum mit den andern materiellen Dingen die in ihm sind, mit derselben Geschwindigkeit nach der entgegengesetzten Richtung von B nach A rücken, so sehen wir den Körper A eben so, wie vorhin, immer näher bey den Dingen in B, und am Ende in B selbst. Also ist die Wahrnehmung der Bewegung in beyden Fällen ganz dieselbe.

Zus. 4. Eine zusammengesetzte geradlinigte Bewegung ist nur auf dreyerley Art möglich. Denn in zwey einfachen Bewegungen, die in ihr vereinigt als eine einzige gedacht werden sollen, ist die Richtung entweder einerley, oder die Richtung der einen ist der Richtung der andern direct entgegen gesetzt, oder die eine ist der andern indirect entgegen gesetzt, so daß beide mit einander einen hohlen Winkel machen.

Lehrsatz 3.

§. 10. Wenn ein Körper mit zwey einzelnen Geschwindigkeiten zugleich sich nach einerley Rich-

tung gleichförmig bewegt; so ist seine zusammengesetzte Geschwindigkeit der Summe der beyden einzelnen gleich.

Beweis. Denn man setze, (Fig. 1.) der Körper würde mit der ersten Geschwindigkeit allein in einer Secunde die Linie AB, und mit der zweyten allein die Linie ab = BC durchlaufen; so stellen diese Linien die beyden einzelnen Geschwindigkeiten vor (§. 7.). Nun setze man in Ansehung der ersten den Raum als ruhend, und den Körper als von A nach B bewegt, in Ansehung der zweyten aber setze man den Körper als ruhend, und den relativen Raum mit der Geschwindigkeit ab = BC nach der entgegengesetzten Richtung von C nach B als bewegt, welches ganz gleichgültig ist (§. 9. Z. 3.); so ist in dem Augenblick, da der Körper A im ruhenden Raum nach B kommt, der relative Ort C ebenfals in B, mithin sehen wir den Körper A nach einer Secunde am Orte C, folglich ist der ganze in einer Secunde durchlaufene Raum = AB + BC. Also ist die zusammengesetzte Geschwindigkeit AC, mit welcher sich der Körper bewegt hat, so groß, als die einzelnen Geschwindigkeiten AB, BC zusammen.

Zus. Wenn daher die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Körper bewegt, aus n gleichen einzelnen Geschwindigkeiten zusammengesetzt ist; so ist die zusammengesetzte n mal größer, als jede einzelne.

Lehrsatz 4.

§. 11. Wenn ein Körper mit zwey einzelnen Geschwindigkeiten zugleich sich nach direct entgegengesetzten Richtungen gleichförmig bewegt; so bewegt er sich nach der Richtung der größern mit einer Geschwindigkeit, die der Differenz der beyden einzelnen gleich ist.

Beweis. Denn man setze (Fig. 2.) mit der ersten Geschwindigkeit allein durchlaufe der Körper in einer Secunde AB, und mit der zweyten allein AC, und mache AF = AC. Nun setze man wieder, statt der zweyten Bewegung von A nach C, daß der relative Raum mit derselben Geschwindigkeit AF = AC sich nach der entgegengesetzten Richtung von A nach F bewege; so sehen wir, wenn der Körper A nach B kommt, den Ort A, den wir vorhin in A sahen, jetzt in F, also hat sich nach unserer Wahrnehmung der Körper A bloß durch FB bewegt. Nun ist FB = AB — AC. Also ist seine zusammengesetzte Geschwindigkeit die Differenz der beyden einzelnen.

Zus. Wenn daher ein Körper mit zwey gleichen Geschwindigkeiten sich nach direct entgegengesetzten Richtungen gleichförmig bewegen soll; so wird seine Geschwindigkeit = 0, und er bleibt also in Ruhe.

Lehrsatz 5.

§. 12. Wenn ein Körper mit zwey einzelnen Geschwindigkeiten zugleich sich nach indirect entgegengesetzten Richtungen, d. i. nach Linien, die einen

hohlen Winkel einschließen, gleichförmig bewegt; so durchläuft er die Diagonale des Parallelogramms, das mit den beyden einzelnen Geschwindigkeiten unter dem gegebenen Directionswinkel beschrieben wird, und seine zusammengesetzte Geschwindigkeit ist dieser Diagonale gleich, daher nennt man diese auch die mittlere Geschwindigkeit.

Beweis. Denn man setze (Fig. 3.) der Körper A durchlaufe in einer Secunde mit der ersten Geschwindigkeit allein die Linie AC, und mit der zweyten allein die Linie AB. Nun ziehe man BD mit AC, und CD mit AB parallel, und lasse wieder, statt der zweyten Bewegung von A nach B im ruhenden Raum den relativen Raum mit der Geschwindigkeit AB nach entgegengesetzter Richtung von B nach A fortrücken; so sieht man, wenn der Körper von A nach C kommt, den relativen Ort D in C, mithin sehen wir den Körper A jetzt in der Ecke D der Diagonale AD. Nun setze man, im n ten Theil der Secunde wäre der Körper mit der ersten Geschwindigkeit allein bis E, und mit der zweyten allein bis M gekommen; so sahe man ihn nach dem n ten Theil der Secunde in der Ecke N der Diagonale AN des Parallelogramms AMNE (p. dem.), und da AE : AC = AM : AB, folglich auch AE : AC = EN : CD ist; so muß die Ecke N in der Diagonale AD liegen (denn läge sie außer derselben, z. B. in F; so wäre AE : AC = EF : CD, mithin EN = EF). Also befindet sich der Körper A in jeden Augenblick in der Diagonale AD, d. i. er durchläuft dieselbe, und wenn daher seine einzelnen

nen

nen Geschwindigkeiten den Seiten AC, AB des Parallelogramms gleich sind; so ist seine zusammengesetzte Geschwindigkeit der Diagonale desselben gleich.

Zus. 1. Also läßt sich die gleichförmige Bewegung eines Körpers A durch die gerade Linie AD allemal so ansehen, als ob sie aus den beyden einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB des Parallelogramms ABDC zusammengesetzt wäre.

Zus. 2. Wenn ein Körper sich mit zwey einzelnen Geschwindigkeiten nach indirect entgegengesetzten Richtungen bewegt, so ist seine zusammengesetzte Geschwindigkeit kleiner als die beyden einzelnen zusammen.

Denn da $AD < AC + CD$, und $CD = AB$; so ist $AD < AC + AB$.

Zus. 3. Also ist die zusammengesetzte Geschwindigkeit bloß in dem Fall der Summe der einzelnen gleich, wenn diese einerley Richtung haben (§. 10.), sonst aber ist sie allemal kleiner als die Summe der einzelnen, ihre Richtungen mögen direct entgegengesetzt seyn (§. 11.), oder indirect (Z. 2.).

Zus. 4. Wenn man (Fig. 3.) den Sinus totus $= 1$ setzt; so ist $\cos C = \frac{CD^2 + AC^2 - AD^2}{2\,CD\,.\,AD}$ (Anfangsgr. d. reinen Mathesis, Trigon. §. 10) $= \frac{AB^2 + AC^2 - AD^2}{2\,AB\,.\,AC}$, also

$AD = \surd(AB^2 - 2\,AB\,.\,AC\,.\,\cos.\,C + AC^2)$.

Nun ist $C = 180^\circ - CAB$, folglich, wenn CAB spitz ist, $\cos.\,CAB = -\cos.\,C$ (ebend. §. 3. Z. 7. 8.). Wenn daher der Directionswinkel CAB

B

der beyden einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB spitz ist; so ist die zusammengesetzte Geschwindigkeit $AD = \sqrt{(AB^2 + 2\,AB \cdot AC \cdot cos.\,CAB + AC^2)}$

Zus. 5. Wenn hingegen (Fig. 4.) der Directionswinkel CAB der beyden einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB stumpf ist; so wird cos. CAB negativ, also ist hier die zusammengesetzte Geschwindigkeit $AD = \sqrt{(AB^2 - 2\,AB \cdot AC \cdot cos.\,CAB + AC^2)}$ (Z. 4.)

Zus. 6. Wenn (Fig. 5.) der Directionswinkel CAB der beyden einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB ein rechter ist; so ist cos. CAB = 0, also ist hier die zusammengesetzte Geschwindigkeit $AD = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$ (Zus. 4. 5.).

Zus. 7. Je kleiner (Fig. 3.) der spitze Directionswinkel CAB der einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB wird, desto mehr nähert sich cos. CAB dem Werthe = 1, mithin die zusammengesetzte Geschwindigkeit AD dem Werthe der Summe AB + AC (Z. 4.).

Zus. 8. Je größer der stumpfe Directionswinkel CAB (Fig. 4.) der einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB wird; desto mehr nähert sich — cos. CAB dem Werthe = — 1, mithin die zusammengesetzte Geschwindigkeit AD dem Werthe der Differenz AB — AC.

Zus. 9. Wenn der spitze Directionswinkel CAB (Fig. 3.) der einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB = 0 wird, mithin beyde ganz einerley Richtung haben; so wird cos. CAB = 1, also die zusammengesetzte Geschwindigkeit AD der Summe der beyden

einzelnen AB + AC gleich (Z. 4.), mithin so, wie §. 10. bewiesen worden.

Zus. 10. Wenn hingegen der stumpfe Directionswinkel CAB (Fig. 4.) der beyden einzelnen Geschwindigkeiten AC, AB = 180° wird, mithin die Richtung von AB der Richtung von AC direct entgegengesetzt ist; so ist — cos. CAB = — 1, mithin die zusammengesetzte Geschwindigkeit AD = AB — AC, also der Differenz der beyden einzelnen gleich (Z. 5.), und da AB in die der Linie AC direct entgegengesetzte größere Linie AB fällt; so bewegt sich der Körper A nach der Richtung der größern Geschwindigkeit AB, mithin wieder eben so, wie (§. 11.) bewiesen worden.

Anmerkung.

Der Begriff der zusammengesetzten Bewegung fordert, daß in eben demselben Körper zwey oder mehrere einzelne Geschwindigkeiten dergestalt vereinigt werden sollen, daß dadurch eine dritte entstehe, die mit ihnen zusammen völlig einerley ist. Soll man sich aber diese beyden einzelnen Bewegungen des Körpers in eben demselben Raum vorstellen; so ist dieser Begriff in sich selbst widersprechend. Denn die Theile der Geschwindigkeit sind nicht, wie die Theile des Raums und der Zeit, ausgedehnte oder extensive Größen, in welchen das Ganze sich durch Addition oder Subtraction der Theile erzeugen läßt, sondern unausgedehnte oder intensive Größen, in welchen sich die Theile bloß als verschiedene Grade denken lassen, von welchen der eine zwar zwey, drey und mehrere male größer oder kleiner als der andere gedacht werden kann, aber nicht in der Art, als ob zwey gleiche Grade zusammengenommen einen zweymal größern, oder zwey gleiche Grade von einem dreymal größern subtrahirt einen dreymal kleinern geben, sondern der zweymal größere oder kleinere Grad sich bloß durch den zweymal größern oder kleinern Raum bestimmen

läßt, den der Körper in derselben Zeit durchläuft. Soll also der Körper sich wirklich mit zwey einzelnen Geschwindigkeiten zugleich in ebendemselben ruhenden Raum bewegen; so läßt sich der Begriff der zusammengesetzten Bewegung gar nicht construiren, mithin die Möglichkeit einer solchen Bewegung gar nicht anschaulich machen, man mag sich die beyden einzelnen Geschwindigkeiten des Körpers nach einerley Richtung, oder nach direct oder indirect entgegen gesetzten Richtungen denken. Nimmt man hingegen, wie in den Beweisen der drey letzten Lehrsätze, an, die eine Bewegung geschehe im ruhenden Raum, und statt der zweyten bewege sich der relative Raum nach direct entgegengesetzter Richtung, welches, wie gezeigt worden, ganz gleichgültig ist; so läßt sich der Begriff der zusammengesetzten Bewegung ohne alle Mühe construiren, mithin die Möglichkeit der letztern a priori mit der größesten Evidenz in der Anschauung darstellen.

Vergebens hat man daher, um die Theorie der zusammengesetzten Bewegung fest zu stellen, seine Zuflucht zu den Kräften der Körper genommen. Denn die Frage ist hier nicht: wie eine größere Kraft, z. B. eine größere Portion Schießpulvers, im Körper eine größere Geschwindigkeit hervorbringen könne, sondern vielmehr diese: wenn man von allen Kräften gänzlich abstrahirt, und sich im Körper keine andere Eigenschaft als bloß seine Beweglichkeit denkt, wie überhaupt aus zwey einzelnen Geschwindigkeiten desselben, sie mögen herrühren, woher man will, eine dritte zusammengesetzt werde, die mit ihnen zusammen ganz einerley ist. Zu dieser Einsicht kann aber der Begriff der Kraft offenbar nichts beytragen. Wenn z. B. zwey Pferde mit gleichen Geschwindigkeiten den Wagen nach einerley Richtung ziehen; so wird hiedurch die Geschwindigkeit desselben doch offenbar nicht zweymal größer, sondern das ganze Resultat ist hier bloß dieses, daß die Kraft, die ein einziges Pferd anwenden müßte, jetzt unter zwey gleich vertheilt, und daher für jedes zweymal kleiner wird. Man setze also, ein Schiff werde vom Strohme und vom Winde zugleich nach einerley Richtung getrieben; so läßt sich noch gar nicht schließen, daß es sich zweymal geschwinder bewegen muß, ja es läßt sich nicht einmal einsehen, wie das Schiff sich mit der ersten Ge-

schwindigkeit in freyer Bewegung erhalten könne, indem die zweyte hinzukommt, und es bleibt daher noch immer der Zweifel übrig, ob nicht das vom Strohm bewegte Schiff eben dadurch dem Stoße des Windes beständig ausweiche, mithin denselben gänzlich unwirksam mache und aufhebe, und man kann es also nicht anders als durch die Erfahrung ausmitteln, ob es sich wirklich geschwinder bewegt habe. Setzt man, daß zwey Pferde mit gleicher Kraft einen Körper nach direct entgegengesetzten Richtungen ziehen; so können sie sich gar nicht bewegen, so wenig, als wenn sie beyde unmittelbar an ihren Schweifen zusammen gebunden wären, mithin bleiben beyde, eben sowohl als der Körper, in Ruhe, also kann man hier gar nicht einmal von zwey einzelnen Bewegungen reden, sondern man müßte sagen: die Ruhe des Körpers ist aus einer zwiefachen Ruhe zusammengesetzt, oder da die Ruhe hier eigentlich das Bestreben, sich zu bewegen, vorstellen soll; so müßte man sich im eigentlichen Sinne so ausdrücken; in demselben Körper ist nicht einmal das Bestreben, sich nach zwey direct entgegengesetzten Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten zugleich zu bewegen, denkbar, sondern der Begriff eines solchen Bestrebens schon an sich widersprechend. Dieses zeigt sich auch, wenn man annimmt, daß die Kraft des einen Pferdes größer als die des andern ist, denn hier lassen sich, ihre Richtungen mögen direct oder indirect entgegengesetzt seyn, beyde Bewegungen zugleich, wenn man sich dieselben in ebendemselben ruhenden Raum vorstellen will, gar nicht einmal als möglich denken, und man kann also auch hier bloß empirisch verfahren, und über ihre Möglichkeit bloß die Erfahrung befragen, die aber nie absolute Nothwendigkeit und strenge Allgemeinheit lehren kann.

Wäre die Möglichkeit der zusammengesetzten Bewegung a priori unmittelbar einleuchtend, mithin ein Postulat; so ließe sich der fünfte Lehrsatz, und daher auch der dritte und vierte als leichte Corollaria desselben, auf folgende Art auch unter der Voraussetzung, daß beyde einzelne Bewegungen des Körpers in ebendemselben Raum gedacht würden, sehr leicht demonstriren. Man setze nämlich (Fig. 3.) der Körper A bewege sich binnen einer Secunde mit der ersten Geschwindigkeit allein durch AC, und mit der andern zugleich durch

AB. Ist beydes zugleich möglich; so entfernt er sich vermöge der ersten von AB so weit, als der Punkt C von AB absteht, und vermöge der zweyten von AC so weit, als der Punkt B von AC absteht, folglich muß er sich am Ende in einem Punkte D befinden, der von AB eben so weit absteht, als der Punkt C, und von AC eben so weit als der Punkt B, mithin muß CD mit AB, und BD mit AC parallel seyn. Also muß der Körper A sich am Ende in der Ecke D des Parallelogramms ABDC befinden, mithin, da die Bewegungen durch AC und AB gleichförmig angenommen werden, sich durch die Diagonale AD bewegen.

Uebrigens ist von selbst klar, daß wenn die zusammengesetzte Bewegung erst für zwey einzelne Geschwindigkeiten bestimmt worden, sie sich auch für drey, vier und überhaupt für so viele, als man will, bestimmen läßt.

Dritter Abschnitt.

Von der Größe der Bewegung der Körper.

Erklärung 8.

§. 13. Die Menge der Materie, welche den festen Körper ausmacht, heißt seine Masse.

Zus. Also ist die Masse eines festen Körpers die Summe aller materiellen Theile, oder physischen Punkte, die sich mit ihm in parallelen Richtungen und mit einerley Geschwindigkeit mitbewegen (§. 4. Z. 2.), und wenn er in Ruhe ist, mit ihm mitruhen (§. 4. Z. 1.).

Lehrsatz 6.

§. 14. Wenn zwey Körper von gleichen Massen mit gleichen Geschwindigkeiten sich gleichförmig

bewegen; so ist die Größe der Bewegung in derselben Zeit in beyden einerley.

Beweis. Denn bey der Größe der Bewegung eines Körpers kommt nichts in Betrachtung, als die Menge der bewegten Materie, die Größe des durchlaufenen Raums, und die Länge der Zeit, in welcher dieses geschehen ist (§. 1. Z. 1.). Sind daher bey zwey bewegten Körpern diese drey Stücke einerley; so sind ihre Bewegungen von einerley Größe. Allein wenn zwey Körper gleiche Massen haben; so ist die Menge der Materie in ihnen einerley (§. 13), und bewegen sie sich beyde gleich geschwinde; so ist auch die Größe des in eben derselben Zeit von ihnen gleichförmig durchlaufenen Raums in beyden einerley (§. 7.). Also ist die Größe der Bewegung in einerley Zeit in beyden einerley.

Zus. 1. Wenn daher zwey Körper mit gleichen Geschwindigkeiten sich gleichförmig bewegen; so hat derjenige, der eine n mal größere Masse hat, auch eine n mal größere Bewegung. Denn wenn man die Masse des ersten in n gleiche Theile theilt; so ist in jedem dieser Theile eben so viel Bewegung als im zweyten Körper (Lehrs. 6.), folglich in allen n Theilen d. i. im ganzen Körper n mal mehr. Also verhalten sich in zwey gleichförmig bewegten Körpern von gleicher Geschwindigkeit die Größen der Bewegung, wie ihre Massen (Arithm. §. 119.) d. i. wenn man die Größen oder Quantitäten ihrer Bewegung Q, q, und ihre Massen M, m nennt; so ist, bey gleichen Geschwindigkeiten, $Q : q = M : m$.

Zus. 2. Wenn zwey Körper von gleichen Massen sich gleichförmig bewegen; so ist in dem n mal geschwindern die Bewegung n mal größer. Denn es ist eben so viel, als ob seine Bewegung aus n einzelnen bestünde, deren jede mit dem n ten Theil seiner Geschwindigkeit geschähe (§. 10.). Also verhalten sich bey gleichen Massen die Größen der Bewegung, wie ihre Geschwindigkeiten (Ar. §. 119), d. i. bey gleichen Massen ist $Q : q = C : c$.

Lehrsatz 7.

§. 15. Wenn zwey Körper sich gleichförmig bewegen; so sind die Größen ihrer Bewegung in einerley Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Massen und Geschwindigkeiten, d. i.

$$Q : q = \begin{pmatrix} M : m \\ C : c \end{pmatrix}.$$

Beweis. Denn man nehme einen dritten Körper, in welchem die Größe der Bewegung K ist, und der die Geschwindigkeit C des ersten, und die Masse m des zweyten hat; so ist

$Q : K = M : m$ (§. 14. Z. 1.)
und $K : q = C : c$ (§. 14. Z. 2.)

Also $Q : q = \begin{pmatrix} M : m \\ C : c \end{pmatrix}$ (Ar. §. 126. Z. 1.).

Zus. 1. Druckt man daher die Verhältnisse der Massen und der Geschwindigkeiten in Zahlen aus; so verhalten sich die Größen der Bewegung, wie die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten, d. i. $Q : q = MC : mc$ (Ar. §. 127).

Zus. 2. Sind daher die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten gleich; so sind auch die Bewegungen gleich, und wenn umgekehrt die letztern gleich sind, so sind auch die erstern gleich, d. i. wenn $MC = mc$; so ist $Q = q$, und wenn $Q = q$ ist; so ist $MC = mc$. (Z. 1.).

Zus. 3. Wenn daher die Massen zweyer Körper sich umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten verhalten; so sind ihre Bewegungen gleich, und wenn diese gleich sind; so verhalten sich die Massen umgekehrt wie die Geschwindigkeiten, d. i. wenn $M : m = c : C$ ist; so ist $Q = q$, und wenn $Q = q$ ist; so ist $M : m = c : C$ (Z. 2.).

Zus. 4. Wenn man im zweyten Körper die Größe der Bewegung q, der Masse m, und der Geschwindigkeit c zur Einheit annimmt, so daß im ersten Körper die Größe der Bewegung Q mal, die Masse M mal, und die Geschwindigkeit C mal größer ist, als im zweyten, so ist die Bewegung des ersten so viel mal größer, als das Product der Zahlen M, C beträgt, d. i. $Q = MC$ (Z. 2.).

Daher druckt man diesen Satz kurz so aus: die Größe der Bewegung ist dem Product aus der Masse in die Geschwindigkeit gleich.

Zus. 5. Also bekommt man die Masse des Körpers, wenn man die Größe seiner Bewegung durch seine Geschwindigkeit dividirt, und die Geschwindigkeit bekommt man, wenn man die Größe der Bewegung durch die Masse dividirt (Z. 4.) d. i. $M = \frac{Q}{C}$, und $C = \frac{Q}{M}$.

Zus. 6. Da in der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeiten sich wie die in einerley Zeit durchlaufenen Räume verhalten (§. 7. Z. 8.); so verhalten sich die Größen zweyer gleichförmigen Bewegungen in einerley Zeit, wie die Producte aus den Massen in die durchlaufenen Räume (Z. 1), d. i. wenn zwey gleichförmige Bewegungen in einerley Zeit geschehen; so ist $Q : q = MS : ms$.

Zus. 7. Wenn daher die Producte aus den Massen in die in einerley Zeit durchlaufenen Räume gleich sind; so sind auch die Bewegungen gleich, und wenn letztere gleich sind; so sind auch die erstern gleich (Z. 6.), d. i., wenn bey der Bewegung in einerley Zeit $MS = ms$; so ist $Q = q$, und wenn $Q = q$ ist; so ist $MS = ms$.

Zus. 8. Wenn die Bewegungen in einerley Zeit gleich sind; so verhalten sich die Massen umgekehrt, wie die durchlaufenen Räume, und wenn letztere sich so verhalten; so sind die erstern gleich (Z. 7.), d. i. wenn $Q = q$ ist; so ist $M : m = s : S$, und wenn $M : m = s : S$ ist; so ist $Q = q$.

Zus. 9. Wenn man für die Bewegung in einerley Zeit im zweyten Körper q, m, s zur Einheit annimmt, d. i. sie $= 1$ setzt; so daß im ersten Körper die Größe der Bewegung Q mal, die Masse M mal, und der in einerley Zeit durchlaufene Raum S mal größer ist, als im zweyten; so ist die Bewegung des ersten so viel mal größer, als das Product der Zahlen MS beträgt (Z. 7.) d. i. $Q = MS$.

Zus. 10. Also ist in diesem Fall $M = \frac{Q}{S}$, und $S = \frac{Q}{M}$ (Z. 9.)

Zus. 11. Da die Größe einer Kraft sich bloß aus ihrer hervorgebrachten Wirkung bestimmen läßt, und die Wirkung einer bewegenden Kraft nichts anders als Bewegung ist; so läßt sich die Größe zweyer bewegenden Kräfte nicht anders, als durch die Größe ihrer hervorgebrachten Bewegungen bestimmen. Also verhalten sich die Größen zweyer bewegenden Kräfte, wie die Producte aus ihren Massen in die Geschwindigkeiten (Z. 1.), mithin nicht wie Leibnitz behauptete, der die Kräfte bey der wirklichen Bewegung lebendige nannte, wie die Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten. Sein Versehen bestand bloß in der Uebersehung des Umstandes, daß beyde Bewegungen in einerley Zeit geschehen sollen.

Anmerkung 1.

Die Größe oder Quantität der Bewegung ist theils eine extensive, theils eine intensive. Denn so fern man bey einerley Geschwindigkeit auf die Masse sieht; so wird die Bewegung bloß in so fern größer, in so fern man die Bewegung der größern Masse durch Wiederholung der Bewegung der kleinern Masse erzeugt. Also ist die Quantität der Bewegung, so fern sie von der Masse abhängt, eine extensive. So fern sie hingegen von der Geschwindigkeit abhängt, ist sie eine intensive, wie oben gezeigt worden. Also kann man von einem Körper, der, bey gleicher Geschwindigkeit, eine dreymal größere Masse hat, als ein anderer, eigentlich nur sagen: in ihm ist dreymal mehr Bewegung. Von einem solchen hingegen, der, bey gleicher Masse,

sich dreymal geschwinder bewegt, muß man eigentlich sagen: seine Bewegung ist dreymal stärker, oder von einem dreymal höhern Grade.

Anmerkung 2.

Die drey ersten Abschnitte haben bloß die Qualität und Quantität der Bewegung eines Körpers überhaupt zum Gegenstande, ohne auf irgend eine Qualität oder Kraft des Beweglichen Rücksicht zu nehmen, und bestimmen daher die allgemeinen Principien für jede Bewegung eines Körpers, der von gegebener Qualität ist. Die Qualität der Bewegung besteht bloß in der Richtung, nach welcher sie geschieht, und wurde nach ihren drey Kategorien der Realität, Negation und Limitation bestimmt, nämlich in so fern sie nach einerley Richtung geschieht, als affirmativ oder real, in so fern sie nach direct entgegengesetzten Richtungen gedacht wird, als negativ, und in so fern sie nach indirect entgegengesetzten Richtungen möglich ist, als limitirt. In den beyden ersten wurde von der Ausdehnung des Körpers gänzlich abstrahirt, mithin letzterer bloß als ein beweglicher Punkt betrachtet, und zwar so, daß der erste Abschnitt den Begriff der einfachen Bewegung dieses Punktes construirte, der zweyte aber sich mit der Construction des Begriffs der zusammengesetzten Bewegung beschäftigte, und die Quantität derselben nach ihren drey Kategorien, nämlich der Einheit in den einzelnen Bewegungen des Punkts nach einer und eben derselben Richtung, der Mehrheit in seinen Bewegungen nach zwey directentgegengesetzten Richtungen, und der Allheit in seinen Bewegungen nach allen möglichen indirect entgegengesetzten und hiedurch zugleich nach allen möglichen Richtungen bestimmte. Der dritte Abschnitt aber betrachtet den Körper nach seinem vollständigen Begriff als ein aus Theilen außerhalb einander bestehendes ausgedehntes Ganzes, und bestimmt also die Quantität der Bewegung des ganzen vollständigen Körpers, ohne gleichwohl außer seiner Beweglichkeit, auf irgend eine andere Qualität desselben Rücksicht zu nehmen. Derjenige Theil der Mechanik, der, ohne Rücksicht auf irgend eine Qualität des Beweglichen, bloß die

Qualität und Quantität seiner Bewegung zum Object hat, heißt die Phoronomie, mithin besteht diese aus den drey ersten Abschnitten. Da nun ferner derjenige Theil der reinen Mathesis, der, ohne Rücksicht auf irgend eine Größe von gegebener Qualität, sich bloß mit Erzeugung der Quantität überhaupt beschäftigt, die allgemeine Größenlehre, derjenige hingegen, welcher Größen von gegebener Qualität zum Object hat, die besondere Größenlehre heißt; so ist die Phoronomie die eigentliche allgemeine Größenlehre der Mechanik, der ganze übrige Theil der Mechanik hingegen gehört schon zu ihrer besondern Größenlehre, mithin ist die Phoronomie die Grundlage der ganzen Mechanik, also auch der ganzen Naturwissenschaft und der auf dieser beruhenden Naturlehre oder Physik.

Diese ganze zweyte Anmerkung afficirt indessen den Mechaniker nicht als Mechaniker, sondern nur sofern er über die Mechanik philosophiren will.

Vierter Abschnitt.

Von den ursprünglichen bewegenden Kräften der Materie.

Erklärung 9.

§. 16. Die Materie erfüllt den Raum, wenn keine andere mit ihr zugleich darinn seyn kann. Ein Raum, der nicht von einer Materie erfüllt ist, heißt ein leerer Raum. Die Eigenschaft der Materie, daß mit ihr keine andere Materie zugleich in demselben Raum seyn kann, heißt ihre Undurchdringlichkeit.

Zus. Also muß jeder Theil der Materie als Materie seinen Raum erfüllen und undurchdringlich

seyn. Denn man nehme irgend einen materiellen Theil des Körpers an, und setze, daß andere materielle Theile mit ihm zugleich in seinem Raum seyn könnten; so könnten alle übrigen Theile des Körpers, da sie als Materie beweglich sind (§. 1.), nach und nach in seinen Raum fortrücken, folglich würde der ganze Körper endlich sich bloß in dem Raum des angenommenen Theils befinden, und da dieser als materiell gleichfals aus beweglichen Theilen besteht; so könnten sie gleichfals so lange in einander rücken, bis sie sich in einem bloßen Punkte des Raums vereinigten, mithin könnte auch die gesammte Materie des Körpers sich in demselben Punkte vereinigen, und da dieses auf die nämliche Art von aller den Körper umgebenden Materie überhaupt möglich wäre; so könnte alle Materie zuletzt sich so vereinigen, daß sie einen bloßen Punkt des Raums einnähme. Da nun dieses dem Begriff der Materie geradezu widerspricht (§. 1. Z. 5.) mithin alle Materie im Raum gänzlich aufgehoben würde; so muß jeder Theil der Materie als Materie seinen Raum erfüllen, und undurchdringlich seyn.

Erklärung 10.

§. 17. Diejenige Kraft der Materie, welche das Eindringen der andern Materien in ihren Raum hindert, heißt Zurückstoßungskraft. Diejenige Kraft der Materie, durch welche sich ihre Theile von einander zu entfernen streben, heißt eine expansive, oder Ausdehnungskraft, imgleichen Elasticität. Eine Kraft, die der Materie als Ma-

terie zukommt, d. i. eine solche, ohne welche keine Materie möglich ist, heißt eine ursprüngliche Kraft der Materie.

Lehrsatz 8.

§. 18. Jeder Theil der Materie besitzt eine ursprüngliche Ausdehnungskraft oder Elasticität, und zwar von einem Grade, über den noch immer größere und kleinere Grade möglich sind.

Beweis. Denn jeder Theil der Materie muß als Materie seinen Raum erfüllen (§. 16. Z.) d. i. es ist unmöglich daß eine andere Materie in seinen Raum dringen, und mit ihm zugleich darin seyn kann (§. 16.). Nun kann eine andere Materie aus ihrem Orte nach dem Orte der erstern nicht anders kommen, als durch Bewegung (§. 1. Z. 2.). Soll also ihr Eindringen in den Raum des angenommenen Theils (welcher bey der Frage über die Möglichkeit des Eindringens in seinen Raum, wie sich von selbst versteht, als in Ruhe bleibend betrachtet werden muß) unmöglich seyn; so muß ihre Bewegung, so bald sie an die Oberfläche desselben kommt, sogleich aufhören. Diese Veränderung aber muß eine Ursache haben, und diese kann, da hier nichts weiter als der angenommene materielle Theil allein in Betrachtung kommen soll, keine andere, als dieser Theil selbst seyn, also muß derselbe die Ursache seyn, welche die Bewegung der Materie, sobald sie an seine Oberfläche kommt, aufhebt. Nun ist die Aufhebung der Bewegung bloß durch eine ihr direct entgegengesetzte gleiche Bewegung möglich

(§. 11.), folglich muß der angenommene materielle Theil durch Bewegung Ursache von der Aufhebung einer andern Bewegung seyn können, d. i. er muß eine bewegende Kraft besitzen, und da dieselbe das Eindringen in seinen Raum hindert; so ist sie eine Zurückstoßungskraft (§. 17.). Soll sie aber die anrückende Materie von der Oberfläche des materiellen Theils zurückstoßen; so muß dieser sich ihr zu nähern, mithin von den übrigen Theilen des Körpers, zu welchen er gehört, zu entfernen streben, also muß seine Zurückstoßungskraft Ausdehnungskraft oder Elasticität (§. 17), und da sie, wie erwiesen worden, dem materiellen Theil als materiellen zukommen muß, eine ursprüngliche seyn (§. 17). Also muß jeder Theil der Materie eine ursprüngliche Ausdehnungskraft oder Elasticität besitzen.

Nun kann diese weder unendlich groß noch unendlich klein seyn, weil die Geschwindigkeit, welche von ihr bewirkt würde, im ersten Fall in einer endlichen Zeit einen unendlich großen zu durchlaufenden Raum, und im zweyten in einer unendlich kleinen Zeit, d. i. im Augenblick einen endlichen Raum erfordern würde (§. 8. Z. 4.), beydes aber widersprechend ist. Also muß die ursprüngliche Ausdehnungskraft begränzt seyn, d. i. sie muß einen Grad haben, über den noch immer größere und kleinere Grade möglich sind.

Zus. 1. Also ist es bloß die ursprüngliche Ausdehnungskraft der Materie, welche ihre Raumerfüllung

lung, Undurchdringlichkeit, mithin ihre Ausdehnung selbst möglich macht (§. 16. Z. 1.).

Zus. 2. Da der leere Raum ein nicht erfüllter ist (§. 16.); so ist in ihm gar keine Materie, also ist er kein Gegenstand einer möglichen Wahrnehmung (§. 2. Z. 3.), d. i. keine Erfahrung kann lehren, daß es einen leeren Raum gebe.

Erklärung 11.

§. 19. Diejenige Kraft der Materie, welche andere Materien zu nöthigen strebt, daß sie sich ihr nähern, heißt anziehende Kraft, Anziehungskraft, Attractionskraft.

Lehrsatz 9.

§. 20. Jeder Theil der Materie hat eine ursprüngliche Anziehungskraft.

Beweis. Denn jeder Theil der Materie hat eine ursprüngliche Kraft sich auszudehnen (§. 18.) mithin seinen Raum zu erweitern. Nun läßt es sich zwar denken, daß diese Ausdehnungskraft immer schwächer wird, je weiter sich der Theil ausdehnt, d. i., je mehr sich seine Theile von einander entfernen. Allein völlig aufhören kann sie nie, weil (wie §. 18. im Beweise dargethan worden) der Grad einer jeden bewegenden Kraft, so klein er auch seyn mag, noch immer kleiner werden kann. Hätte also die Materie außer ihrer Ausdehnungskraft keine andere bewegende Kraft; so würden sich alle Theile der Materie nach und nach dergestalt zerstreuen, daß in keinem anzugebenden Raum weiter Materie be-

findlich, mithin keine Materie im Raum vorhanden seyn würde. Soll daher Materie im Raum möglich seyn; so müssen alle Theile der Materie außer der Ausdehnungskraft, die sie von einander zu entfernen strebt, noch eine Kraft haben, die ihr entgegen wirkt, mithin eine Kraft, einander zu nähern. Also muß jeder Theil der Materie als Materie eine Anziehungskraft haben (§. 19.), d. i. eine ursprüngliche (§. 17.).

Zus. 1. Also hat die Materie zwey ursprüngliche Kräfte, die nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und auf deren Vereinigung allein die Möglichkeit der Materie beruht, nämlich Ausdehnungs- oder Zurückstoßungskraft und Anziehungskraft.

Zus. 2. Da die ursprüngliche Anziehungskraft der Materie als Materie zukommt; so wirkt die Anziehungskraft eines Körpers auf alle übrigen unaufhörlich, sie mögen in Ruhe oder in Bewegung seyn.

Zus. 3. Da die ursprüngliche Anziehungskraft der Materie als Materie zukommt; so muß n mal mehr Materie auch eine n mal größere Anziehungskraft besitzen. Also verhalten sich die ursprünglichen Anziehungskräfte zweyer Körper, wie ihre Massen (§. 13.).

Zus. 4. Eben so müssen sich daher auch die ursprünglichen Ausdehnungs- oder Zurückstoßungskräfte verhalten.

Erklärung 12.

§. 21. Die unmittelbare Wirkung einer Kraft der Materie auf eine andere Materie, in einer ge-

meinschaftlichen Fläche beyder, heißt **physische Berührung**. Die unmittelbare Wirkung einer Kraft der Materie auf eine andere Materie ohne Berührung heißt eine **Wirkung in die Ferne** (actio in distans).

Zus. 1. Also wirkt die Ausdehnungs- oder Zurückstoßungskraft bloß durch physische Berührung (§. 7.), die Anziehungskraft hingegen wirkt **unmittelbar** auch in die Ferne (§. 19.).

Zus. 2. Wenn daher ein Körper vermöge seiner ursprünglichen Anziehungskraft auf einen entfernten Körper wirkt; so kommt die Materie, die zwischen ihnen liegt, in keine Betrachtung, sondern die Wirkung derselben ist einerley, der Raum zwischen ihnen mag erfüllt, oder leer seyn.

Anmerkung 1.

Der Verstand sträubt sich anfänglich gegen den Begriff einer Wirkung in die Ferne, weil es **unbegreiflich** ist, wie ein Körper in den andern ohne Berührung unmittelbar wirken könne. Allein man vergißt, daß es **eben so unbegreiflich** ist, wie ein Körper auf den andern, der ihn berührt, wirken und ihn zurückstoßen könne. Der ganze Unterschied besteht bloß darinn, daß die Anziehungskraft sich nicht so unmittelbar unsern Sinnen zu erkennen giebt, als die Zurückstoßungskraft, die sich unserm **Gefühl** darbietet, und uns zugleich die **Größe** und **Figur** des Körpers kennen lehrt. Ueberhaupt aber ist es eine unmögliche Forderung, die Möglichkeit **ursprünglicher** Kräfte **begreiflich** zu machen. Denn eben darum, weil sie als ursprüngliche sich von keiner andern ableiten lassen, können sie gar nicht begriffen werden. Der scheinbarste und daher gewöhnlichste Einwurf wider die unmittelbare Wirkung in die Ferne ist der: daß eine Materie da, **wo sie nicht ist**, doch nicht **unmittelbar** wirken könne. Allein man bedenkt nicht, daß auch die Zurückstoßungskraft des

Körpers, selbst bey der physischen Berührung eines andern Körpers, da, wo sie nicht ist, in diesen wirkt. Denn die gemeinschaftliche Fläche in der physischen Berührung ist weder ein Theil des einen noch des andern Körpers, sondern bloß die gemeinschaftliche Grenze, also ist kein Theil des einen da, wo der andere ist, mithin wirkt auch der zurückstoßende eigentlich da wo er nicht ist, in den ihn berührenden unmittelbar. Ueberhaupt kann jede Materie auf eine andere nur da wirken, wo sie nicht ist. Denn sollte sie da wirken, wo sie ist; so würde folgen, daß die Materie, auf welche sie wirkt, nicht außer ihr, sondern mit ihr in demselben Orte des Raums befindlich wäre. Uebrigens kann man die ursprünglichen Kräfte der Materie auch ihre wesentlichen Kräfte, oder Grundkräfte nennen.

Anmerkung 2.

Der vierte Abschnitt betrachtet die Qualität der Materie, als des Beweglichen, selbst nach ihren drey Kategorien, nämlich der Realität, Negation und Limitation. Sie stellt also das Bewegliche als das Reale im Raum dar, d. i. als dasjenige, was unserer Empfindung entspricht, indem es durch die Wirkung seiner ursprünglichen Ausdehnungs- oder Zurückstoßungskraft ein unmittelbarer Gegenstand unsers Gefühls ist. Allein die Materie hat nicht alle Realität, sondern diese ist begrenzt, und hat also einen Grad, über den noch immer größere und kleinere möglich sind (§. 18.). Durch die bloße Ausdehnungskraft der Materie aber wird die Menge der Materie für einen gegebenen Raum, mithin auch die Größe ihrer Ausdehnung und ihre Gestalt so wenig bestimmt, daß vielmehr ihre Theile sich immer weiter von einander entfernen, folglich sich ins Unendliche zerstreuen würden, und zuletzt in jedem angeblichen Raum gar keine Materie mehr seyn würde. Also muß die Materie noch eine andere ursprüngliche Kraft besitzen, die der Zurückstoßungskraft gerade entgegen wirkt, und daher in Beziehung auf die letztere, die man als positiv betrachtete, eine negative ist, nämlich die Anziehungskraft, und bloß durch die vereinigte Wirkung dieser beyden Kräfte ist die Beschränkung des Realen im Raum, d. i.

eine bestimmte Menge der Materie in einem gegebenen Raum, die Größe ihrer Ausdehnung, und ihre Figur möglich.

Die Wissenschaft von den Kräften der Materie heißt die Dynamik. Also enthält der gegenwärtige vierte Abschnitt die ganze ursprüngliche Dynamik, und ist daher die Grundlage für die Theorie aller übrigen abgeleiteten Kräfte.

Auch diese zweyte Anmerkung afficirt indessen eben so wenig, als die letzte Anmerkung über den dritten Abschnitt, den Mechaniker als Mechaniker, sondern ist bloß für den, der über die Mechanik philosophiren will.

Fünfter Abschnitt.

Von den Grundgesetzen der Bewegung.

Erklärung 13.

§. 22. Dasjenige an einem Gegenstande, das bey allen Veränderungen desselben bleibend oder beharrlich ist, heißt eine Substanz, und jede mögliche Bestimmung ihrer verschiedenen Art zu existiren, heißt ein Accidenz von ihr.

Lehrsatz 10.

§. 23. Jeder Theil der Materie ist eine Substanz, und jede Bewegung desselben ein bloßes Accidenz von ihm.

Beweis. Denn die Theile der Materie können sich, vermöge ihrer ursprünglichen Ausdehnungskraft, alle successiv von einander entfernen (§. 17. 18.), und sind also, jeder für sich selbst, beweglich.

Nun ist unsere Auffassung, oder Apprehension des Mannigfaltigen allemal nur successiv, das letztere mag zugleich da seyn, oder aufeinander folgen. Also könnten wir durch diese allein niemals bestimmen, ob die wahrgenommene Bewegung des materiellen Theils, d. i. die Succession in seinem Uebergange von einem Orte in einen andern bloß ihren Grund in unserer nicht anders als successiv möglichen Auffassung habe, mithin bloß etwas sey, was in uns vorgeht, mithin bloß etwas Subjectives ist, oder dem materiellen Theil als Object beyzulegen sey, wofern dieser nicht immer da, d. i. etwas Bleibendes und beharrliches wäre, an welchem sich die successive Veränderung seines Orts, d. i. seine Bewegung allein wahrnehmen läßt, indem wir sonst gar nicht wissen könnten, ob der Theil, den wir am ersten Orte wahrnahmen, eben derselbe ist, den wir jetzt am zweyten auffassen, und ob er sich also wirklich von seinem Orte bewegt habe. Also muß jeder Theil der Materie eine Substanz seyn, mithin kann seine Bewegung nichts anders als nur eine besondere Art seiner Existenz im Raum, d. i. ein Accidenz von ihm seyn.

Zus. Also ist jeder physische Körper aus lauter materiellen Substanzen zusammengesetzt.

Erklärung 14.

§. 24. Die Materie heißt mathematisch theilbar, so ferne sich eine geometrische Fläche als die gemeinschaftliche Grenze zweyer Theile denken

läßt. **Physisch theilbar** aber heißt sie, wenn die gedachten Theile sich wirklich von einander entfernen d. i. trennen lassen.

Zus. 1. Da die Materie im Raum ausgedehnt ist (§. 1. Z. 4.); so wird sie durch jede geometrische Fläche, die den Raum in zwey Theile theilt, gleichfals getheilt, mithin ist sie in eben so viele Theile mathematisch theilbar, in so viele der Raum theilbar ist. Da nun dieser ins Unendliche theilbar ist (Geom. §. 11. Z. 5.); so ist auch die Materie **mathematisch** ins Unendliche theilbar. Nun aber sind die Theile des Raums alle unbeweglich (Geom. §. 9.) mithin lassen sie sich gar nicht von einander trennen. Also folgt daraus, daß sie mathematisch ins Unendliche theilbar ist, noch gar nicht, daß sie es auch **physisch** ist; sondern die mathematische Theilbarkeit der Materie ist eben so wie die Theilbarkeit des Raums eine bloße Theilbarkeit in Gedanken.

Zus. 2. Die Materie ist nicht bloß mathematisch, sondern auch **physisch** ins Unendliche theilbar. Denn jeder Theil der Materie ist eine für sich selbst bewegliche Substanz (§. 23.), folglich sind alle Theile der Materie vermöge ihrer ursprünglichen Ausdehnungskraft, von einander trennbar (§. 17. 18.), mithin läßt sie sich in eben so viele Theile physisch theilen, in so viele sie mathematisch theilbar ist. Nun ist sie mathematisch ins Unendliche theilbar (Z. 1.), also ist sie es auch physisch.

Zus. 3. Also sind **untheilbare**, oder **einfache Theile** der Materie, mithin auch **untheil-**

bare oder einfache Substanzen im Raum schlechterdings unmöglich.

Lehrsatz 11.

Erstes Grundgesetz der Bewegung.

§. 25. Die Menge der Materie bleibt bey allen Veränderungen der letztern, im Ganzen immer dieselbe, unvermehrt und unvermindert.

Beweis. Denn jeder Theil der Materie ist eine Substanz, d. i. etwas Bleibendes oder Beharrliches, das also nie vergehen, oder zu seyn aufhören kann (§. 23.), mithin kann die Menge der Materie nie vermindert werden. Eben so wenig aber kann sie auch vermehrt werden, denn sonst müßten neue Materien mithin neue Substanzen im Raum entstehen d. i. anfangen zu seyn. Allein da das Entstehen kein Gegenstand möglicher Wahrnehmung ist; so könnte dieses Entstehen der neuen Materie bloß für eine neue Bestimmung der Art der Existenz der schon vorhandenen Materien, d. i. nicht für eine Substanz, sondern bloß für ein Accidenz von bereits vorher vorhandenen Materien gehalten werden. Also bleibt die Menge der Materie immerfort dieselbe, unvermehrt und unvermindert.

Lehrsatz 12.

Zweytes Grundgesetz der Bewegung.

§. 26. Jeder Körper beharrt in seinem Zustande wofern nicht eine äußerliche Ursache

denselben verändert, d. i. jeder Körper, der in Ruhe ist, bleibt in Ruhe, wofern ihn nicht eine äußerliche Ursache in Bewegung setzt, und jeder Körper, der einmal in Bewegung ist, setzt seine Bewegung in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit fort, wofern nicht eine äußerliche Ursache seine Bewegung aufhebt, oder ihre Richtung und Geschwindigkeit abändert.

Beweis. Denn jede Veränderung hat eine Ursache. Bey der Veränderung des Zustandes der Materie aber kann diese Ursache nicht in ihr selbst befindlich seyn. Denn da die Materie bloß ein Gegenstand der äußern Wahrnehmung ist (§. 1. Z. 5.); so hat sie keine andere als äußere Bestimmungen, d. i. solche, die sich bloß auf ihre äußern Verhältnisse im Raum beziehen (§. 2. Z. 3.), mithin hat sie kein innerliches Vermögen, sich zur Veränderung ihres Zustandes selbst zu bestimmen. Also muß jeder Körper in seinem Zustande beharren, wofern nicht eine äußerliche Ursache denselben verändert.

Da nun so wohl der Uebergang aus der Ruhe in die Bewegung, als der aus der Bewegung in die Ruhe, imgleichen in eine andere Richtung und Geschwindigkeit eine Veränderung ist, so muß jeder Körper, der in Ruhe ist, in Ruhe bleiben, und jeder, der in Bewegung ist, in derselben nach eben der Richtung und mit eben der Geschwindigkeit immerfort bleiben, wofern nicht eine äußere Ursache eine Abänderung macht.

Anmerkung.

Man kann dieses Gesetz der Bewegung den Satz der Beharrlichkeit nennen, und er sagt im Grunde nichts anders als dieses: die Materie als Materie ist todt d. i. sie hat kein inneres Vermögen, sich selbst zur Veränderung ihres Zustandes zu bestimmen. Es könnte zwar der Verdacht entstehen, als ob dieses den obigen Sätzen widerspräche, nach welchen die Materie zwey ursprüngliche Kräfte nämlich Zurückstoßungs- und Anziehungskraft besitzt. Allein kein Theil der Materie stößt sich selbst weg, sondern nur die übrigen, und eben so zieht auch keine Materie sich selbst, sondern nur die übrigen an. Uebrigens bestätigt sich dieses Gesetz schon durch die gemeinsten Erfahrungen z. B. wenn man im schnellen Laufen einen kleinen Stein in die Höhe wirft; so kann man ihn, ungeachtet des fortgesetzten Laufs, doch wieder auffangen rc.

Da jeder Körper für sich in seinem Zustande beharret; so schrieb man vormals der Materie eine positive Neigung oder ein Bestreben zu, sich in ihrem Zustande zu erhalten, und nannte dasselbe die Trägheit der Materie (inertiam). Hieraus floß also, daß jeder Körper schon durch seine bloße Trägheit demjenigen, der ihn bewegen wollte, widerstände, und daß also der letztere einen Theil seiner Bewegung, oder bey gleichen Maßen seine ganze Bewegung bloß dazu anwenden müßte, die Trägheit des erstern zu überwinden. Da nun jeder Widerstand eine Kraft voraussetzt; so belegte der unsterbliche Kepler diese so genannte Trägheit der Materie endlich in der That mit dem Namen der Trägheitskraft (vis inertiae). Allein da die Materie für sich bloß darum in ihrem Zustande bleibt, weil sie todt ist, so folgt von selbst, daß wenn man sie träge nennt, dieses kein positives Bestreben ihren Zustand zu erhalten, bedeuten könne, und daß also eine Trägheitskraft der Materie ein Unding ist. Nur lebende Wesen nennt man in dieser letzten Bedeutung träge, weil diese eine Vorstellung von einem andern Zustande haben, aber weil sie ihn verabscheuen, ihre Kraft dagegen anstrengen, um sich in dem Zustande der Ruhe, in welchem sie sind, zu erhalten. Uebrigens läßt schon ohnehin sichs eben nicht wohl begreifen, wie eine Kraft, die nach Ruhe strebt, zugleich eine Kraft

und Neigung seyn könne, wenn sie einmal in Bewegung und Thätigkeit ist, sich immerfort in Bewegung und Thätigkeit zu erhalten.

Erklärung 15.

§. 27. Wenn ein Körper einen andern in Bewegung setzt, oder seine Bewegung verändert, so sagt man: er theilt ihm seine Bewegung mit. Geschieht dieses so, daß der erste den zweyten von sich entfernt, oder zu entfernen strebt; so sagt man: er stößt ihn. Geschieht es aber so, daß er die physische Berührung mit dem andern zu erhalten strebt; so sagt man: er schiebt ihn. Geschieht es endlich so, daß er den zweyten entweder unmittelbar durch die ursprüngliche Anziehungskraft, oder mittelbar z. B. durch ein Seil, zur Annäherung zu nöthigen strebt; so sagt man: er zieht ihn. Wenn dadurch, daß ein Körper auf einen andern wirkt, dieser auch auf ihn wirkt; so nennt man die Wirkung des andern Gegenwirkung (reactio), und die gegenseitige Wirkung beyder auf einander heißt Wechselwirkung.

Zus. 1. Soll daher die Ruhe der Körper, und ihre Bewegung nicht unverändert immer dieselbe bleiben; so muß jeder Körper vermögend seyn, andern seine Bewegung mitzutheilen (§. 26.).

Zus. 2. Jede Wirkung eines Körpers erfordert Gegenwirkung.

Denn seine Wirkung ist entweder Stoß, oder Schieben, oder Ziehen. Stößt oder schiebt ein Körper den andern; so sucht er in den Raum des an-

dern zu bringen, folglich muß dieser, vermöge seiner ursprünglichen Zurückstoßungskraft ihn zurückstoßen (§. 18.). Zieht er ihn aber, vermöge seiner ursprünglichen Anziehungskraft unmittelbar an; so zieht dieser vermöge eben derselben ihn gleichfals an (§. 20). Zieht er endlich den andern mittelbar; so strebt er die Theile desselben von einander zu entfernen, diese aber streben, vermöge ihrer ursprünglichen Anziehungskraft einander zu nähern (§. 20.), mithin wirkt auch hier der andere Körper dem ersten entgegen. Also ist keine Wirkung eines Körpers auf den andern ohne Gegenwirkung des andern möglich.

Zus. 9. Also befinden sich alle Körper mit einander in Wechselwirkung (Z. 1.).

Anmerkung.

Es könnte scheinen, als ob im Beweise des zweyten Zusatzes das Drehen fehlte. Allein dieses ist nichts anders als ein Stoßen oder Schieben in einem Kreise.

Lehrsatz 13.

Drittes Grundgesetz der Bewegung.

§. 28. In der Mittheilung der Bewegung sind Wirkung und Gegenwirkung (actio et reactio) jederzeit gleich groß.

Beweis. Denn man setze (Fig. 6.) ein Körper A, der sich mit der Masse M und Geschwindigkeit C nach der Richtung AF bewegt, wirke in einen andern B, der sich mit der Masse m und Geschwindigkeit c nach eben der Richtung BF bewegt; so ist die Größe der Bewegung des Körpers A = MC,

und des Körpers B = mc (§. 15.). Nun nehme man an, daß der Körper A, nach überwundener Gegenwirkung des Körpers B, sich mit der Geschwindigkeit K, und B mit der Geschwindigkeit c + k fortbewege; so ist jetzt die Bewegung des Körpers B = mc + mk (§. 15.), also ist die neue Bewegung, die der Körper A im Körper B bewirkt hat, = mk. Nun läßt sich die Größe der Action bloß durch die Größe ihres Effects bestimmen, also ist die auf den Körper B verwandte Action des Körpers A = mk. Nun ist ferner nach aufgehobener Gegenwirkung des Körpers B die Bewegung des Körpers A = MK (§. 15.), folglich ist der ganze Effect, den die Bewegung MC des Körpers A bewirkt hat, = MK + mk, mithin ist MK + mk = MC, folglich MK = MC — mk, also ist die Bewegung MC des Körpers A durch die Reaction des Körpers B und das Product mk vermindert worden, mithin ist die Reaction des Körpers B ebenfals = mk. Also sind Action und Reaction gleich groß.

Man setze zweytens, sowohl vor als nach der Reaction bewege sich der Körper A nach der Richtung AF, der Körper B aber nach der entgegengesetzten BA, (welches in dem Fall statt findet, wenn beyde bewegte Körper sich zugleich gegenseitig anziehen); so wird hier die Bewegung des Körpers B negativ, mithin vor der Reaction = mc, und nach Aufhebung derselben = — (mc + mk), mithin die auf den Körper B verwandte Action des Körpers A = — mk, die ganze durch seine Bewe-

gung MC bewirkte Bewegung aber ist hier MK — mk, folglich MK — mk = MC, folglich MK = MC + mk, mithin ist hier die Bewegung MC des Körpers A durch die Reaction des Körpers B vergrößert, also ist diese = + mk, d. i. der Körper B, welchen der Körper A nach der Richtung BA bewegte, hat diesem mit gleicher Action nach der Richtung AB entgegenwirkt, wodurch also seine Geschwindigkeit um mk vergrößert worden. Also ist auch in diesem Fall Action und Reaction gleich groß.

Ist drittens der Körper B anfangs in Ruhe; so bleibt der Beweis ganz derselbe, denn in diesem Falle wird c = o, und hierdurch der Beweis in den beyden ersten Fällen bloß etwas weniges kürzer.

Zus. 1. Also kann kein Körper, so groß auch seine Kraft seyn mag, auf einen andern stärker wirken, als dieser entgegen zu wirken im Stande ist.

Zus. 2. Sowohl die Größe der Bewegung, die der eine Körper von dem andern empfängt, als auch diejenige, die der andere dadurch verliert, ist jederzeit der Größe der Reaction gleich.

Zus. 3. Da jede Action eine gleiche Reaction erfordert; so bleibt in der Körperwelt die Summe der Activität oder Thätigkeit im Ganzen immerfort dieselbe.

Zus. 4. Da durch jede Action eine ihr gleiche Bewegung bewirkt wird; so bleibt in der Körperwelt auch die Quantität der Bewegung im Ganzen immerfort dieselbe.

Anmerkung.

Der fünfte Abschnitt, von den drey Grundgesetzen der Bewegung, welche nebst allen übrigen Bewegungsgesetzen, die sich aus ihnen herleiten lassen, die Mechanik im strengsten Sinne ausmachen, betrachtet die Relation der Materie nach den drey Kategorien: Substanz und Accidenz, Ursache und Wirkung, Gemeinschaft oder Wechselwirkung. Nach dem ersten Grundgesetze der Bewegung ist die Materie die Substanz, und alle ihre Bestimmungen bloße Accidenzien derselben. Nach dem zweyten ist jede Veränderung der Materie die Wirkung einer äußerlichen Ursache, und nach dem dritten stehen alle Materien durch Wechselwirkung mit einander in Gemeinschaft. Eben so bestimmt dieser Abschnitt auch die Bewegung in Ansehung ihrer Relation als ein Accidenz der Materie, als Wirkung einer Ursache, und als gemeinschaftlicher Erfolg einer Wechselwirkung.

Diese Anmerkung afficirt indessen, so wenig als die letzten zum dritten und vierten Abschnitt den Mechaniker als Mechaniker, sondern ist gleichfals bloß für den, der über die Mechanik philosophiren will.

Sechster Abschnitt.

Vom Stoß der Körper.

Erklärung 16.

§. 29. Ein Körper heißt in relativer Bedeutung hart, wenn er sich nicht merklich zusammendrücken, oder überhaupt seine Figur nicht merklich verändern läßt, z. B. Steine, Glas, Edelsteine rc. Absolut oder vollkommen hart würde der heißen, der seine Figur gar nicht ändern ließe. Ein

Körper heißt weich, wenn er sich leicht zusammendrücken, oder seine Figur ändern läßt, und so, wie sie verändert worden, zugleich beybehält. Vollkommen weich würde er heißen, wenn dieses schon durch die kleinste nicht mehr angebliche Kraft möglich wäre. Ein Körper heißt im engsten Sinne elastisch, oder er besitzt eine Springkraft, Federkraft, wenn er zwar die Veränderung seiner Figur zuläßt, aber so bald die wirkende Kraft aufhört, seine vorige Figur sogleich wieder herzustellen strebt, und vollkommen elastisch, wenn er jedesmal seine vorige Figur von selbst wieder vollkommen herstellt, so bald die Ursache ihrer Veränderung zu wirken aufhört. Unelastisch heißt ein Körper, wenn er seine veränderte Figur gar nicht von selbst wieder herstellt.

Zus. Also ist ein vollkommen harter Körper unelastisch, mithin kann ein elastischer nur eine relative Härte haben.

Anmerkung.

Ob es vollkommen harte, imgleichen vollkommen elastische oder unelastische Körper gebe, läßt sich weder a priori, noch durch Erfahrung beweisen, aber auch auf beyden Wegen eben so wenig widerlegen, mithin ist der Begriff einer vollkommenen Härte, Elasticität und Unelasticität bloß problematisch, und daher eine bloße Idee, die aber zur Beurtheilung des Stoßes der Körper unentbehrlich ist. Vollkommen weiche Körper sind unmöglich, weil sonst eine unendlich kleinere Kraft eine endliche Wirkung hervorbringen müßte, welches widersprechend ist.

Lehr=

Lehrsatz 14.

§. 30. Wenn zwey unelastische d. i. entweder vollkommen harte oder weiche Körper A, B sich in derselben geraden Linie nach einerley Richtung bewegen, und der geschwindere A von einer größern Bewegungskraft den andern B einholt und auf ihn stößt, so bekommt man die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, mit welcher sich nach dem Stoße beyde in derselben Richtung fortbewegen, wenn man die Summe der Quantitäten ihrer Bewegungen durch die Summe ihrer Massen dividirt, d. i. wenn der Körper A sich mit der Masse M und der Geschwindigkeit C, der Körper B aber mit der Masse m und der Geschwindigkeit c bewegt, und $MC > mc$ ist; so ist die Geschwindigkeit beyder nach dem Stoße $= \frac{MC + mc}{M + m}$.

Beweis. Denn wenn die Kraft des Körpers A größer ist, als die Kraft des Körpers B; so ist beym Stoße die entgegengesetzte Reaction des Körpers B kleiner, als die Bewegung des Körpers A (§. 10.), folglich bewegt sich A nach dem Stoß in eben der Richtung fort, und schiebt daher den Körper B, nachdem seine Gegenwirkung aufgehoben worden, wegen seiner Undurchdringlichkeit mit gleicher Geschwindigkeit vor sich her. Nun sind beyde Körper unelastisch (p. hyp.), folglich ist weder die Wirkung des einen noch des andern durch die Elasticität vergrößert worden, sondern der ganze

Effect der Bewegung beyder ist bloß die Größe ihrer gemeinschaftlichen Bewegung nach dem Stoße, diese aber ist so groß, als die Summe beyder Bewegungen vor dem Stoße, mithin $= MC + mc$ (§. 15. Z. 2, 4.). Nun setze man ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoß $= K$; so ist die Größe ihrer gemeinschaftlichen Bewegung nach dem Stoß zusammen $= MK + mK = (M + m) K$, folglich $(M + m) K = MC + mc$, also $K = \frac{MC + mc}{M + m}$.

Z. B. wenn $M = 12$, $C = 6$, $m = 8$, $c = 3$ ist; so ist nach dem Stoß die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= \frac{72 + 24}{20} = 4\frac{4}{5}$.

Zus. 1. Bewegen die beyden Körper sich nach entgegengesetzten Richtungen; so bekommt man ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße, wenn man die Differenz ihrer Bewegungen durch die Summe ihrer Massen dividirt. Denn in diesem Fall wird die Bewegung mc des Körpers negativ, also $K = \frac{MC - mc}{M + m}$.

Z. B. im vorigen Exempel ist hier $K = \frac{72 - 24}{20} = 2\frac{2}{5}$.

Zus. 2. Wenn daher zwey unelastische Körper, deren Massen sich umgekehrt, wie ihre Geschwindigkeiten verhalten, gegen einander laufen; so kommen

sie durch den Stoß beyde in Ruhe. Denn wenn $M : m = c : C$ ist; so ist $MC = mc$, also $K = o$ (Z. 1.).

Zus. 3. Wenn der Körper B, auf welchen der stärkere A stößt, in Ruhe ist; so bekommt man die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, mit welcher nach dem Stoße der stärkere Körper den schwächern fortschiebt, wenn man die Quantität der Bewegung des erstern durch die Summe der Massen beyder dividirt. Denn hier wird $c = o$, also $K = \frac{MC}{M + C}$ (Lehrs. 14.).

Z. B. wenn $M = 12$, $C = 6$, $m = 8$; so ist $K = \frac{72}{20} = 3\frac{3}{5}$.

Zus. 4. Stößt daher ein Körper auf einen ruhenden von gleicher Masse; so bewegen nach dem Stoße sich beyde halb so geschwinde, als der bewegte vor dem Stoße. Denn wenn $M = m$ ist; so ist $K = \frac{MC}{2M} = \frac{1}{2} C$ (Z. 3.).

Lehrsatz 15.

§. 31. Wenn zwey vollkommen elastische Körper A, B sich in derselben geraden Linie nach einerley Richtung bewegen, und der geschwindere stärkere A den andern B einholt, und auf ihn stößt; so bekommt man die Geschwindigkeit nach dem Stoß für den Körper A, wenn man die doppelte Summe der

Bewegungen beyder durch die Summe ihrer Massen dividirt, und vom Quotienten die Geschwindigkeit des Körpers A abzieht. Die Geschwindigkeit des Körpers B aber bekommt man, wenn man von gedachtem Quotienten die Geschwindigkeit des Körpers B abzieht, d. i. die Geschwindigkeit des Körpers A ist $= \frac{2(MC + mc)}{M + m} - C$, und die Geschwindigkeit des Körpers B $= \frac{2(MC+mc)}{M + m} - c$.

Beweis. Denn wären beyde Körper unelastisch; so bewegte sich jeder von ihnen nach dem Stoße mit einerley Geschwindigkeit K (§. 22.) folglich wäre die Bewegung des Körpers A, die vor dem Stoße = MC war, nach dem Stoße = MK, mithin der Verlust, den sie durch die Reaction des Körpers B erlitten = MC — MK. Allein da er den Körper B zusammendrückt, dieser aber seine Figur wieder herzustellen strebt (§. 21.); so stößt er ihn aufs neue mit gleicher Kraft zurück, mithin ist der neue Verlust, den die Bewegung MK des Körpers A durch diese zweyte Reaction leidet, wieder eben so groß, als der vorige, nämlich = MC – MK. Zieht man also diesen von der Bewegung MK ab; so ist die Bewegung des Körpers A nach dem Stoß = MK — (MC — MK) = M (2K — C), mithin seine Geschwindigkeit = 2K — C. Nun ist $K = \frac{MC + mc}{M + m}$ (§. 22.). Also ist die Geschwin-

digkeit des Körpers A nach dem Stoß

$$= \frac{2\,MC + mc)}{M + m} - C.$$

Mit derselben Kraft aber, mit welcher A den Körper B durch den Stoß zusammendrückte, drückt auch dieser den Körper A zurück, folglich wirkt dieser, indem er seine vorige Figur wiederherstellt, auf den Körper B eben so stark zurück, und vermehrt also hiedurch seine Bewegung mK um eben so viel, als seine simple Reaction, ohne Rücksicht auf die Elasticität betrug. Diese aber betrug gerade so viel, als der Gewinst von Bewegung, den er dadurch bekommen hatte (§. 15.). Nun war seine Bewegung nach dem Stoß = mK, vor dem Stoß aber nur = mc, folglich der Gewinst = mK — mc, mithin ist seine wahre Bewegung nach dem Stoß = mK + mK — mc = m (2 K — c), also seine Geschwindigkeit = 2 K – c.

Nun ist $K = \frac{MC + mc}{M + m}$ (§. 22.). Also ist die Geschwindigkeit des Körpers B nach dem Stoße =

$$\frac{2\,(MC + mc)}{M + m} - c.$$

Z. B. wenn M = 8, C = 6, m = 4, c = 3; so ist die Geschwindigkeit des Körpers A = $\frac{2\,(48 + 12)}{12} - 6 = 4$, und des Körpers B = 7.

Setzt man M = 2, C = 16, m = 3, c = 1; so ist die Geschwindigkeit des Körpers A = $\frac{2\,(32 + 3)}{5} - 16 = -2$, und des Körpers

B = 13. Da also die Geschwindigkeit des Körpers A hier negativ wird; so läuft er mit der Geschwindigkeit = 2 zurück, B aber mit der = 13 fort.

Zus. 1. Wenn zwey elastische Körper A, B einander entgegen kommen; so ist nach dem Stoß die Geschwindigkeit für A = $\frac{2(MC - mc)}{M + m} - C$, und für B = $\frac{2(MC - mc)}{M + m} + c$. Denn hier wird mc negativ.

Zus. 2. Wenn daher zwey elastische Körper, deren Massen sich umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten verhalten, einander entgegen laufen; so läuft nach dem Stoß jeder mit seiner vorigen Geschwindigkeit zurück. Denn hier wird MC = mc, folglich MC — mc = 0, also ist die Geschwindigkeit für A = — C, und für B = + c (Z. 1.).

Zus. 3. Stößt der elastische Körper A auf einen andern elastischen B, der in Ruhe ist; so ist nach dem Stoß die Geschwindigkeit für A = $\frac{2MC}{M+m} - C$, und für B = $\frac{2MC}{M+m}$. Denn hier wird mc = 0.

Zus. 4. Stößt daher ein elastischer Körper A auf einen andern elastischen B von gleicher Masse, der in Ruhe ist; so theilt er ihm seine ganze Geschwindigkeit mit, er selbst aber kommt in Ruhe. Denn da hier M + m = 2 M; so ist nach dem

Stoß die Geschwindigkeit für $A = C - c = 0$, und für $B = C$ (Z. 3.).

Wenn man daher z. B. eine Menge gleichgroßer elfenbeinerner Kugeln in gerader Linie dicht an einander reiht, und nun eine gleich große in derselben Linie auf sie laufen läßt; so bleibt diese mit allen übrigen in Ruhe, und nur die letzte springt in demselben Augenblick von ihnen mit derselben Geschwindigkeit ab. Ist die stoßende Kugel 2 mal so groß; so springen die zwey letzten ab. Ist jene dreymal so groß; so springen die drey letzten ab, u. s. w.

Zus. 5. Hat dagegen die ruhende Kugel B mehr Masse, als die stoßende A; so läuft A zurück, und B bewegt sich langsamer, als A vor dem Stoße. Denn wenn $m > M$; so ist $M + m > 2 M$, folglich $\frac{2 M}{M + m} < C$, also ist hier die Geschwindigkeit für A negativ, und die für B kleiner als C (Z. 3.).

Zus. 6. Ist endlich die Masse des ruhenden Körpers B so groß, daß die Masse des stoßenden A gegen sie in keine Betrachtung kommt; so läuft der Körper A nach dem Stoß mit eben der Geschwindigkeit zurück, mit welcher er auf den Körper B anlief. Denn wenn $M = 0$ ist; so ist die Geschwindigkeit für $A = - C$, und für $B = 0$ (Z. 3.)

Anmerkung.

Da aber auch die kleinste Masse gegen die größeste, die sich angeben läßt, in vollkommener Schärfe nie = o seyn kann; so ist hieraus klar, daß jeder elastische Körper, so groß auch seine Masse seyn mag, durch den kleinsten auf ihn stoßenden, den man annehmen mag, doch wirklich bewegt wird, wenn gleich diese Bewegung so klein ist, daß sie gar nicht bemerkt werden kann. Also ist der kleinste Körper wirklich im Stande, auch den größesten zu bewegen.

Erklärung 17.

§. 32. Wenn (Fig. 7.) ein elastischer Körper A auf die ebene Fläche EG eines andern im Punkte C stößt, und dieser ihn nach der Richtung CK zurückstößt; so sagt man: der Körper A wird von der Fläche EG reflectirt. Der Winkel ACE, den die Linie AC, in welcher der Körper A auf die Fläche EG in C stößt, macht, heißt sein Einfallswinkel (angulus incidentiae), und der Winkel KCG, unter welchem derselbe nach K reflectirt wird, heißt sein Reflexionswinkel (angulus reflexionis).

Zus. Wenn daher ein elastischer Körper I auf die Fläche EG eines andern als unbeweglich betrachteten senkrecht stößt; so prallt er mit gleicher Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung zurück (§. 31. Z. 6.) mithin sind hier der Einfalls-Winkel ICE, und der Reflexionswinkel ICG beyde rechte Winkel, also einander gleich.

Lehrsatz 16.

§. 33. Wenn (Fig. 7.) ein vollkommen elastischer Körper A auf die Fläche EG eines ruhen-

den B, der als unbeweglich betrachtet wird, unter einem schiefen Einfallswinkel ACE stößt; so wird er dergestalt nach CK reflectirt, daß der Reflexionswinkel KCG dem Einfallswinkel ACE gleich ist.

Beweis. Denn man setze, der Körper A laufe mit der Geschwindigkeit, daß er binnen einer gewissen Zeit gleichförmig durch CH liefe; so stellt CH seine Geschwindigkeit vor (§. 7.). Man beschreibe also das rechtwinklichte Parallelogramm CFHD; so ist seine Geschwindigkeit CH aus den beyden einzelnen CF, CD zusammengesetzt, d. i. es ist eben so viel, als ob der Körper A mit diesen zugleich nach den Richtungen CF, CD auf den Körper B gelaufen wäre (§. 12. Z. 1.). Nun aber findet er in Ansehung der Richtung CD keinen Widerstand, und setzt daher nach dieser seine Bewegung auf der ebenen Fläche EG mit der Geschwindigkeit CD fort (§. 26.), mithin geschieht der ganze Stoß, den der Körper A auf den Körper B ausübt, bloß nach der Richtung CF mit der Geschwindigkeit CF. Allein da der Körper B sich dadurch nicht bewegen läßt (p. hyp.); so stößt er den Körper A nach der entgegengesetzten Richtung CI mit gleicher Geschwindigkeit zurück (§. 31. Z. 6.). Also bewegt sich der Körper A nach dem Stoß mit den Geschwindigkeiten CD, CI zugleich, mithin durch die Diagonale CK des Parallelogramms CIKD (§. 12), also prallt er mit der Geschwindigkeit CK unter dem Winkel KCG zurück. Nun ist CI = CF (p.

dem.), folglich DK = DH, CD = CD, CDK = CDH = R, mithin KCD = HCD, und ACE = HCD, mithin KCD = ACE, und CK = CH. Also wird der Körper A mit derselben Geschwindigkeit dergestalt reflectirt, daß der Reflexionswinkel jederzeit dem Einfallswinkel gleich ist.

Zweyter Theil der Mechanik.

Von der ungleichförmigen Bewegung.

Erster Abschnitt.

Von den Wirkungen der ursprünglichen Anziehungskraft der Körper überhaupt.

Erklärung 18.

§. 34. Eine ungleichförmige Bewegung heißt eine beschleunigte, wenn ihre Geschwindigkeit zunimmt, eine verzögerte, wenn ihre Geschwindigkeit abnimmt. Gleichförmig beschleunigt, oder gleichförmig verzögert heißt die Bewegung, wenn ihre Geschwindigkeit in jedem Augenblick um einen gleichen Theil zu- oder abnimmt.

Zus. 1. Also ist kein Theil einer ungleichförmigen Bewegung gleichförmig.

Zus. 2. Da nun gleichwohl die Bestimmung der Geschwindigkeit und ihrer Veränderung voraussetzt, daß die Bewegung gleichförmig sey (§. 7.) in einem untheilbaren Augenblick aber so wenig, als

in einem geometrischen Punkt Bewegung und Veränderung derselben möglich ist (§. 1. Z. 3.); so ist die Bestimmung der Geschwindigkeit und ihrer continuirlichen Veränderung bloß auf dem Wege der Fiction möglich, nämlich dadurch, daß man sich die Augenblicke als unendlichvielste Theile einer endlichen Zeit, und die in denselben durchlaufenen Räume als unendlichvielste Theile einer endlichen Linie vorstellt. Denn da ein solcher imaginirter Zeittheil in der That ein bloßer untheilbarer Augenblick, und eine solche imaginirte Linie ein bloßer Punkt ist; so ist die darinn imaginirte Bewegung mit der größesten Schärfe als gleichförmig anzusehen, und so kann man die in jedem Augenblick hinzukommende neue Geschwindigkeit so betrachten, als ob sie jedesmal erst im Anfange des folgenden Zeittheilchens hinzukäme.

Lehrsatz 17.

§. 35. Wenn ein Körper B von einem andern A, der als ruhend wahrgenommen wird, durch die ursprüngliche Anziehungskraft des letztern gegen ihn bewegt wird, und diese während der Bewegung immer gleich stark auf ihn wirkt; so ist seine Bewegung eine gleichförmig beschleunigte.

Beweis. Denn die ursprüngliche Anziehungskraft des Körpers A wirkt, eben weil sie ursprünglich ist, und seiner Materie als Materie zukommt, auf alle andere Körper unaufhörlich, sie mögen in Ruhe oder in Bewegung seyn (§. 20. Z. 2.). Man setze also, der Körper A ziehe den Körper B im er-

sten Augenblick mit der Geschwindigkeit c; so setzt dieser dieselbe im zweyten Augenblick mit derselben Geschwindigkeit fort (§. 26.) Allein da der Körper A unaufhörlich auf ihn wirkt (p. dem.), und zwar immer gleich stark (p. hyp.); so theilt er ihm im zweyten Augenblick dieselbe Geschwindigkeit c nach eben der Richtung von neuem mit, folglich ist seine Geschwindigkeit im zweyten Augenblick = 2 c (§. 10). Mit dieser setzt er seine Bewegung im dritten Augenblick wieder fort, bekommt aber wieder die Geschwindigkeit c hinzu, folglich ist seine Geschwindigkeit im dritten Augenblick = 3 c, und so ist klar, daß sie im vierten = 4 c, im fünften = 5 c u. s. w., und überhaupt im nten = n c ist, folglich in jedem Augenblicke um denselben Theil c zunimmt. Also ist sie eine gleichförmig beschleunigte (§. 34.).

Zus. 1. Eben so ist klar, daß wenn der Körper B, sich vom anziehenden A, mit der Geschwindigkeit C zu entfernen sucht, seine Bewegung eine gleichförmig verzögerte ist. Denn hier ist seine Geschwindigkeit im ersten Augenblick = C — c, im zweyten = C — 2 c und überhaupt im nten = C — n c.

Zus. 2. Die Geschwindigkeiten, die der Körper B am Ende zweyer Zeiten hat, verhalten sich, wie die Zeiten, in denen er sie erlangt hat.

Denn man setze die Menge der Augenblicke, die eine Secunde enthält, = ∞, so ist die Menge derer, welche n Secunden enthalten, = n ∞. Nun ist die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde = ∞ c, und am Ende der nten = n ∞ c (Lehrſ.

17.). Also verhält sich die erstere zur letztern wie 1 : n, d. i. wie 1 Secunde zu n Secunden.

Lehrsatz 18.

§. 36. Wenn ein Körper B von einem andern A, der als ruhend wahrgenommen wird, durch die ursprüngliche Anziehungskraft des letztern gegen ihn bewegt wird, und diese während der Bewegung immer gleich stark auf ihn wirkt; so verhalten sich die durchlaufenen Räume, wie die Quadrate der Zeiten, in welchen sie durchlaufen sind.

Beweis. Denn man setze, der Körper durchlaufe im ersten unendlichvielsten Theil einer Zeitsecunde den Raum 1; so ist der durchlaufene Raum im zweyten solchen Zeittheilchen = 2, im dritten = 3 u. s. w., und der im letzten = ∞ (§. 35.), mithin ist der ganze in allen unendlich vielen Zeittheilchen, d. i. binnen einer Secunde durchlaufene Raum $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots \ldots + \infty$. d. i. $= \frac{1}{2} \infty (\infty + 1)$ (Arithm. §. 135), mithin da $\infty + 1 = \infty$ ist, $= \frac{1}{2} \infty^2$. Eben so ist der in n Secunden durchlaufene Raum $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots n\infty = \frac{1}{2} n\infty (n\infty + 1)$ $= \frac{1}{2} n^2 \infty^2$. Also verhält sich der in 1 Secunde durchlaufene Raum zu dem in n Secunden durchlaufenen, wie $\frac{1}{2} \infty^2 : \frac{1}{2} n^2 \infty^2$, d. i. wie $1 : n^2$ also wie die Quadrate der Zeiten, in welchen sie durchlaufen sind.

Z. B. nach 2 Secunden ist der Raum 4mal, nach 3 Secunden 9mal, nach 4 Secunden 16mal ꝛc. größer, als in der ersten Secunde.

Zus. 1. Also wächst der Raum, den der Körper durchläuft, in jeder Secunde nach der Ordnung der ungeraden Zahlen, nämlich in der zweyten Secunde durchläuft er einen 3 mal größern, in der 3ten Secunde einen 5 mal größern, in der 4ten einen 7 mal größern ꝛc., als in der ersten.

Zus. 2. Da die durchlaufenen Räume sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten (Lehrs. 18.) die Zeiten aber sich wie die am Ende derselben erlangten Geschwindigkeiten verhalten (§. 35. Z. 2.); so verhalten sich die durchlaufenen Räume auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, die sie am Ende derselben erlangt haben.

Zus. 3. Die Geschwindigkeit, die der Körper B in einer gewissen Zeit durch seine Bewegung erlangt, ist so groß, daß er mit derselben in eben der Zeit gleichförmig einen zweymal größern Raum durchlaufen kann, als der ist, den er durchlaufen ist.

Denn man setze, eine Secunde enthalte ∞ Augenblicke, und der im ersten Augenblick durchlaufene Raum sey $= 1$; so ist der im ∞sten, d. i. im letzten Augenblick durchlaufene Raum $= \infty$ (p. dem.), folglich ist am Ende der ganzen Secunde seine Geschwindigkeit so groß, daß er mit derselben in jedem Augenblick gleichförmig den Raum $= \infty$ durchlaufen würde (§. 7.), mithin durchläuft er mit derselben gleichförmig in ∞ Augenblicken, d. i. in einer Secunde, den Raum $= \infty^2$ (§. 3.). Nun aber ist der Raum, den er binnen dieser Zeit durch die Anziehungskraft des Körpers A durchläuft, nur $= \frac{1}{2}\infty^2$ (p. dem.). Also ist die Geschwindigkeit, die der

Körper B binnen einer Secunde erlangt hat, so groß, daß er in eben dieser Zeit mit derselben gleichförmig einen zweymal größern Raum durchlaufen kann.

Lehrsatz 19.

§. 37. Wenn (Fig. 8.) ein materieller Punkt B von allen materiellen Punkten des Körpers A zugleich angezogen wird; so muß es in diesem einen Punkt C geben, nach welchem allein die Bewegung des Punkts B möglich ist.

Beweis. Denn man nehme im Körper A zuerst zwey beliebige Punkte 1, 2 an; so zieht der erste den Punkt B nach B 1 und der zweyte nach B 2, folglich beyde zusammen nach der Diagonale BG des Parallelogramms 1 B 2 G (§. 12.), und nach eben dieser Richtung ziehen ihn zugleich alle Punkte, die in der Linie FG liegen, mithin ist es eben so viel, als ob der Punkt B, statt der Punkte 1, 2 und aller derer, die in FG liegen, von dem einzigen Punkte 3 gezogen würde. Nun nehme man ferner den Punkt 4; so zieht derselbe nebst allen Punkten, die in HI liegen, den Punkt B nach der Richtung BI, die vorigen Punkte vereinigt aber zogen ihn nach der Richtung BG, folglich alle angenommene zusammen nach der mittlern Richtung BL (§. 12.), mithin ist es eben so viel, als ob der Punkt B, statt aller vorigen und aller derer, die in der Linie IL liegen, bloß vom einzigen Punkt 5 gezogen würde. Nimmt man also auf diese Art immer neue Punkte des Körpers A an; so ist klar, daß es

end-

endlich in ihm einen Punkt C geben muß, der den Punkt B nach der Richtung BC so zieht, als ob er statt aller materiellen Punkte des Körpers A, bloß vom Punkte C mit der vereinigten Kraft aller gezogen würde.

Erklärung 19.

§. 38. Derjenige Punkt C im anziehenden Körper A, welcher jeden materiellen Punkt B eben so anzieht, als alle materielle Punkte des Körpers A zusammen, heißt der Mittelpunkt der Anziehung (centrum attractionis) oder kurz der Anziehungspunkt des Körpers A.

Zus. 1. Also kann man die ganze Anziehungskraft eines Körpers so ansehen, als ob sie im Anziehungspunkte allein vereinigt wäre.

Zus. 2. In jedem anziehenden Körper giebt es also einen Anziehungspunkt (§. 37.).

Zus. 3. Da nun jeder angezogene Körper den anziehenden gleichfals anzieht (§. 2.); so giebt es überhaupt in jedem Körper einen Anziehungspunkt, in welchem seine ganze Anziehungskraft vereinigt ist (Z. 2. 1.).

Zus. 4. Wenn daher zwey Körper einander anziehen; so ziehen sich bloß ihre Anziehungspunkte an.

Anmerkung.

Hier zeigt es sich nun deutlich, wie man in der Mechanik nicht nur berechtigt ist, jeden Körper als einen bloßen Punkt anzusehen, sondern zugleich, daß es eigent-

lich sein Anziehungspunkt ist, dessen Bewegung die Bewegung des ganzen Körpers vorstellt.

Lehrsatz 20.

Grundgesetz der ursprünglichen Anziehungskraft.

§. 39. Die Wirkungen der ursprünglichen Anziehungskraft eines Körpers A auf zwey Körper B, D verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Anziehungspunkt C des Körpers A, d. i. die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper A die Körper B, D zu bewegen sucht, nimmt nach dem Quadrat ihrer Entfernungen ab.

Beweis. Denn man beschreibe (Fig. 9.) aus dem Anziehungspunkt C des Körpers A verschiedene Kugeln, deren Oberflächen E, F, G ꝛc. sind. Da nun die Anziehungskraft des Körpers A ursprünglich, folglich von aller Beschaffenheit der übrigen Materien im Raum ganz unabhängig ist; so muß sie auf die gesammte Materie im Weltraum ringsum in allen Weiten gleich stark wirken, folglich auf die gesammte Materie der Kugelfläche E eben so stark, als auf die in den Kugelflächen F, G ꝛc. Nun besteht die Wirkung der Kraft in der Quantität der Bewegung, welche sie hervorzubringen strebt, folglich muß die Anziehungskraft des Körpers A auf allen Oberflächen der Kugeln E, F, G ꝛc. dieselbe Quantität der Bewegung hervorzubringen streben. Diese aber ist dem Product aus der Masse in die Geschwindigkeit gleich (§. 15. Z. 4.). Man setze also die gesammte Masse

in der Kugelfläche E = M, und die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper A sie zu bewegen strebt = C, in der Kugelfläche F aber sey die gesammte Masse = m, und ihre Geschwindigkeit = c; so muß jederzeit MC=mc seyn, mithin C : c=m:M. Nun aber verhalten sich die Kugelflächen F, E wie die Quadrate ihrer Halbmesser, d. i., wie $FC^2 : EC^2$, mithin verhalten sich die Massen, die in ihnen befindlich sind, eben so, folglich ist $m : M = FC^2 : EC^2$. Also ist $C : c = FC^2 : EC^2$, d. i. die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen.

Anmerkung.

Dieser wichtige Satz findet sich auch durch die ganze Astronomie aufs vollkommenste bestätigt.

Zweyter Abschnitt.

Von den Kräften, die zur krummlinigten Bewegung eines Körpers um einen andern erforderlich sind.

Erklärung 20.

§. 40. Wenn (Fig. 10.) ein Körper F sich um einen andern S bewegt; so nennt man die ganze krumme Linie, die er um den letztern durchläuft, seine Bahn (orbita), und die Zeit, welche verfließt, bis er an den Ort F zurückkommt, seine Um-

laufzeit (revolutio periodica). Der jedesmalige Abstand des Körpers F vom Körper S heißt sein radius vector. Die Fläche, welche zwischen zwey radius vectoribus AS, DS und dem Bogen AD zwischen ihnen enthalten ist, heißt der Ausschnitt des Bogens AD. Wenn eine Kugel sich um einen ihrer Durchmesser dreht; so nennt man diesen ihre Axe, die beyden Endpunkte der Axe in der Kugelfläche die beyden Pole der Kugel, und den größesten Kugelkreis, der von beyden Polen 90° absteht, den Aequator der Kugel, und man sagt: die Kugel dreht sich um ihre Axe, imgleichen um ihre Pole, und zwar nach der Richtung ihres Aequators. Die Kraft, welche bey der Axendrehung einer Kugel jeden Punkt ihrer Oberfläche wegzuschleudern strebt, heißt die Schwungkraft. Die Kraft, die den Körper A dem Körper S zu nähern strebt, heißt die vis centripeta, und diejenige, die ihn von S beständig zu entfernen strebt, heißt die vis centrifuga. Beyde einander entgegengesetzte Kräfte heißen die Centralkräfte.

Zus. Wenn daher eine Kugel sich um ihre Axe dreht; so bleibt die Axe mit den beyden Polen, in Beziehung auf die übrigen Punkte der Kugel, immer auf derselben Stelle, jeder andere Punkt hingegen beschreibt einen Kreis mit dem Aequator parallel, und diese Parallelkreise werden immer größer, je näher der Punkt dem Aequator ist, dagegen immer kleiner, je näher er den Polen liegt.

Lehrsatz 21.

§. 41. Wenn ein Körper A (Fig. 10.) sich um einen andern S in irgend einer krummen Linie bewegt; so gehören dazu zwey verschiedene Kräfte, nämlich eine Wurfkraft, die ihn in jedem Punkte A, wo er sich befindet, nach der Richtung der Tangente AB vom Körper S zu entfernen strebt, und eine Anziehungskraft AC, die ihn beständig nach dem Körper S hinzieht. Wenn daher der Körper A durch den Bogen AD, der ein unendlichvielster Theil der ganzen krummen Linie ist, gegangen ist; so bestimmt die Linie DC, die man aus D mit der Tangente AB parallel zieht, die Größe der Wurfkraft, die den Körper A mittlerweile nach der Richtung der Tangente von S zu entfernen gesucht, und AC die Größe der Anziehungskraft, die ihn mittlerweile nach S gezogen hat.

Beweis. Denn wenn sich ein Körper in einer krummen Linie von F nach A bewegt; so hat er in jedem Punkt A, in den er kommt, die Richtung derjenigen geraden Linie, die mit einem unendlich kleinen Bogen übereinkommt, d. i. die Richtung der Tangente AB, welche die krumme Linie im Punkte A berührt, folglich würde er, wofern ihn nichts hinderte, beständig in der geraden Linie AB fortgehen, und sich also immer weiter vom Körper S entfernen (§. 26.). Also ist erstlich eine Wurfkraft da, die den Körper in jedem Punkte A der krummen Linie nach der Richtung der Tangente AB forttreibt, die aber, wenn sie allein da wäre, den

Körper nicht in einer krummen, sondern geraden Linie bewegen, und ihn vom Körper S immer weiter entfernen würde. Soll er sich also in einer krummen Linie bewegen; so muß noch eine andere Kraft da seyn, die ihn in der Richtung AS nach dem Körper S hinzieht, so daß wenn man das Parallelogramm ABDC beschreibt, der Körper durch die Diagonale AD geht, (§. 12.) die mit dem unendlich kleinen Bogen AD einerley ist (Geom. §. 25. Z. 1.). Da nun DC = AB ist; so druckt DC die Größe der Wurfkraft, und AC die Größe der Anziehungskraft für die Bewegung durch den Bogen AD aus.

Zus. 1. Wenn daher (Fig. 11.) die Linie, in welcher der Körper A sich um den Körper S bewegt, ein Kreis ist; so ist AB, also auch DC auf dem radius vector AS senkrecht. Also ist in diesem Fall die Wurfkraft der Sinus, und die Anziehungskraft der Sinus versus des Bogens AD (Trigon. §. 2.).

Zus. 2. Je schneller die Bewegung ist, desto größer ist die dazu erforderliche Anziehungskraft. Denn durchläuft der Körper den Bogen AD; so ist seine Anziehungskraft = AC, durchläuft er aber in derselben Zeit den Bogen AG; so ist seine Anziehungskraft = AE.

Zus. 3. Wenn für dieselbe Anziehungskraft die Wurfkraft des Körpers kleiner ist, als der Sinus des Bogens AD; so wird seine Bahn enger, als die Cirkelbahn, ist sie aber größer, so wird seine Bahn weiter, als die Cirkelbahn (Z. 1.).

Lehrsatz 22.

§. 42. Wenn sich (Fig. 10.) eine Kugel um ihre Axe dreht; so ist die Schwungkraft, welche jeden Punkt der Kugel vom Centro des Parallelkreises, den er durchläuft, beständig zu entfernen strebt, der Anziehungskraft in diesem Kreise gleich.

Beweis. Denn wenn sich eine Kugel um ihre Axe dreht; so sucht der Punkt A sich jeden Augenblick nach der Richtung der Tangente AB fortzubewegen (§. 12.). Indem er also durch den unendlich kleinen Bogen AD gedreht wird; so würde er, wenn man das rechtwinklichte Parallelogramm ABDC beschreibt, mittlerweile nach B gekommen seyn, mithin sich vom Centro S um die Linie DB entfernt haben. Da nun DB = AC ist; so ist die Schwungkraft, welche den Punkt A vom Centro S wegzuschleudern sucht, der Anziehungskraft AC gleich (§. 41.).

Zus. 1. Also ist bey der Axendrehung im Aequator die Schwungkraft am größesten, in den kleinern Parallelkreisen aber wird sie immer kleiner, je weiter der Punkt vom Aequator entfernt ist, in den Polen selbst aber hört sie gänzlich auf. Denn je größer der Kreis ist, den der Punkt in derselben Zeit durchläuft, desto größer ist die Anziehungskraft, die ihm zugehört (§. 41. Z. 2.), also auch die Schwungkraft (Lehrs. 22.).

Zus. 2. Bey der Axendrehung ist die Schwungkraft für den Bogen AD gleichfals seinem Sinusversus gleich.

Anmerkung.

So wohl die Anziehungskraft (§. 41.), die den Körper von der Tangente AB zurückzieht, und ihn dem Körper S (Fig. 10.) näher bringt, als auch die Schwungkraft, die jeden Punkt (Fig. 11.) vom Centro S wegzuschleudern sucht, ist eigentlich die Linie DF. Allein da der Bogen AD als unendlich klein angenommen worden; so fällt der Punkt F in B, und die Linie DF in DB.

Lehrsatz 23.

§. 43. Wenn (Fig. 11.) ein Körper A sich um einen andern S durch einen unendlich kleinen Cirkelbogen AD bewegt; so bekommt man die Größe der Anziehungskraft AC, wenn man das Quadrat des Bogens AD durch den doppelten Halbmesser des Cirkels dividirt, d. i. $AC = \frac{AD^2}{2\,AS}$.

Beweis. Denn im Cirkel ist $AC : CD = CD : CP$ (Geom. §. 156.). Nun ist AD ein unendlichvielster Theil des Cirkels (p. hyp.), folglich fällt der Punkt C in A, und CD in den Bogen AD, mithin ist $CD = AD$, und $CP = AP$, folglich ist $AC : AD = AD : AP$, also $AC = \frac{AD^2}{AP}$. Da nun $AP = 2\,AS$; so ist $AC = \frac{AD^2}{2\,AS}$.

Zus. Wenn sich daher zwey Körper in eben demselben Cirkel binnen einerley Zeit durch zwey unendlich kleine Bogen AD, AG bewegen; so verhalten sich ihre Anziehungskräfte AC, AE, wie die Quadrate der Bogen, d. i. $AC : AE = AD^2 : AG^2$.

Denn da $AC = \frac{AD^2}{2\,AS}$, und $AE = \frac{AG^2}{2\,AS}$ (Lehrſ. 23.); ſo iſt $AC : AE = \frac{AD^2}{2\,AS} : \frac{AG^2}{2\,AS} = AD^2 : AG^2$.

Lehrſatz 24.

§. 44. Wenn ſich zwey Körper mit ungleichen Geſchwindigkeiten in gleichen Cirkeln bewegen; ſo verhalten ſich ihre Anziehungskräfte, wie die Quadrate ihrer Geſchwindigkeiten, d. i. $AC : AE = C^2 : c^2$.

Beweis. Denn man ſetze, binnen der Zeit, da der eine Körper den unendlich kleinen Bogen AD durchläuft, durchlaufe der andere den unendlich kleinen Bogen AG; ſo verhalten ſich ihre Geſchwindigkeiten wie die Bogen, d. i. $C : c = AD : AG$ (§. 7. Z. 4.), folglich iſt $C^2 : c^2 = AD^2 : AG^2$ Nun aber iſt $AC : AE = AD^2 : AG^2$ (§. 34. Z.) Alſo iſt $AC : AE = C^2 : c^2$.

Zuſ. 1. Wenn daher ein Körper in ebendemſelben Cirkel ſich 2 mal geſchwinder bewegen ſoll; ſo muß die Anziehungskraft des Körpers S 4 mal größer ſeyn. Soll er ſich 3 mal geſchwinder bewegen, ſo muß ſie 9 mal größer ſeyn u. ſ. w.

Zuſ. 2. Wenn eine Kugel ſich 2 mal geſchwinder um ihre Axe dreht; ſo wird die Schwungkraft 4 mal größer. Dreht ſie ſich 3 mal geſchwinder; ſo wird letztere 9 mal größer u. ſ. w. Denn die Schwungkraft iſt der Anziehungskraft gleich (§. 42. Z. 2.).

Lehrsatz 25.

Grundgesetz der Bewegung für jeden Körper, der sich um einen andern bewegt.

§. 45. Wenn (Fig. 12.) ein Körper A sich um einen andern S bewegt; so sind die Zeiten, in welchen er zwey Bogen AD, und ADG durchläuft, allemal den Ausschnitten ADS und ADGS proportional, die Linie, in welcher er sich bewegt, sey, welche man wolle. Dieses Gesetz druckt man so aus: radius vector verrit aream.

Beweis. Denn wenn der Körper von F nach A kommt; so sucht er sich nach der Richtung der Tangente AB vom Körper S zu entfernen, da ihn aber der Körper S mittlerweile bis C ziehen würde; so geht er mittlerweile durch den Bogen AD, der wenn er unendlich klein angenommen wird, mit der geraden Linie AD übereinkommt (§. 41.). In D würde er nun wieder, wenn ihn nichts hinderte, nach der Richtung DI in eben der Zeit durch DI = AD fortgehen, und die Ausschnitte ADS, DIS würden selbst in dem Fall, wenn der Körper A sich in der geraden Linie DI immerfort vom Körper S entfernte, gleich groß seyn. Denn da die Dreyecke ADS, DIS gleiche Grundlinien AD, DI und einerley Höhen haben; so sind ihre Flächen gleich. Allein da der Körper S den Körper A mittlerweile durch DE zieht; so geht der Körper nicht durch DI, sondern durch den unendlich kleinen Bogen DG, der mit der geraden Linie DG als der Diagonale des

Parallelogramms DIGE, übereinkömmt, und er beschreibt also, statt DIS den Ausschnitt DGS. Da nun die Dreyecke DGS, DIS einerley Grundlinie DS haben, und zwischen einerley Parallellinien DE, IG liegen; so ist die Fläche DGS = DIS, mithin DGS = ADS. Also ist offenbar, daß, wenn der Körper die Bogen AD, DG in gleichen Zeiten durchläuft, die Ausschnitte ADS, DGS allemal gleich groß sind. Wenn daher die Zeit, da er den Bogen ADG durchläuft, 2 mal so groß ist, als die Zeit, da er den Bogen AD durchläuft; so ist der Ausschnitt ADGS 2 mal so groß, als der Ausschnitt ADS. Ist die erste Zeit 3 mal so groß, als die zweyte; so ist der Ausschnitt ADGS 3 mal so groß, als der Ausschnitt ADS u. s. w. Also verhalten sich die Zeiten, in welchen der Körper zwey Bogen AD, ADG durchläuft, allemal wie die Ausschnitte ADS, ADGS, die Linie die der Körper durchläuft, sey, welche man wolle.

Zus. 1. Wenn daher die Linie, in welcher ein Körper sich um einen andern bewegt, so beschaffen ist, daß die Ausschnitte beständig den Bogen proportional sind, so verhalten sich die Zeiten, in welchen er zwey Bogen durchläuft, wie die Bogen selbst, folglich durchläuft er in gleichen Zeiten gleiche Bogen, also ist in diesem Falle seine Bewegung allemal gleichförmig.

Ist hingegen die Linie, in welcher sich ein Körper bewegt, von der Art, daß die Ausschnitte den Bogen nicht immer proportional sind; so ist von selbst

klar, daß seine Bewegung schlechterdings ungleichförmig seyn muß.

Zus. 2. Wenn die Linie, in welcher der Körper A sich um den Körper S bewegt, ein Kreis ist, und der Körper S in seinem Centro liegt; so verhalten sich die Zeiten, in welchen er zwey Bogen durchläuft, wie die Bogen selbst, und seine Bewegung ist gleichförmig, d. i. immer gleich geschwinde. Denn im Kreise verhalten sich die Ausschnitte allemal, wie die Bogen.

Ist hingegen die Linie, in welcher sich der Körper bewegt, nicht ein Kreis, oder der Körper S nicht in seinem Centro; so sind die Zeiten den Bogen nicht proportional, mithin seine Bewegung ungleichförmig, d. i. bald langsamer, bald geschwinder (Z. 1.).

Zus. 3. Wenn daher zwey Körper A, T (Fig. 13.) sich um einen dritten S in Cirkeln bewegen; so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Distanzen, d. i. die Geschwindigkeit von T verhält sich zur Geschwindigkeit von A, wie AS : TS. Denn in verschiedenen Kreisen verhalten sich ähnliche Bogen wie ihre Halbmesser.

Zus. 4. Alle Axendrehungen sind gleichförmig. Denn wenn eine Kugel sich um ihre Axe dreht; so durchläuft jeder Punkt einen Kreis, und zwar um das Centrum desselben.

Zus. 5. Wenn (Fig. 14.) in der Bahn ADPLA, die der Körper A um den Körper S durchläuft, der Punkt A vom Körper S am weitesten wegliegt, und der Punkt P demselben am nähesten ist; so bewegt er sich in A am langsamsten,

von da aber immer geschwinder; je näher er dem Körper S kommt, im Punkte P aber am allergeschwindesten. Von da aber, wenn er durch L nach A fortgeht, nimmt seine Geschwindigkeit immer ab, je weiter er sich von S entfernt, bis sie wieder in A am kleinsten wird.

Denn wenn er durch den Bogen AM geht; so ist sein Ausschnitt = AMS. Nun setze man, er gehe durch einen Bogen DO, dessen Ausschnitt DOS = AMS ist; so durchläuft er beyde Bogen AM, DO in gleicher Zeit. Allein da die radii vectores AS, MS viel größer sind, als die radii vectores DS, OS; so muß, wenn die Ausschnitte AMS, DOS gleich seyn sollen, der Bogen DO größer seyn, als der Bogen AM. Also muß seine Geschwindigkeit in A am kleinsten seyn, von da aber wenn er durch M nach P geht, immer zunehmen, bis sie in P am größesten wird, und eben so ist klar, daß wenn er von P durch L wieder nach A geht, sich alles umgekehrt verhalten muß.

Zus. 6. Wenn die Bahn des Körpers A von der Art ist, daß man aus jedem Ausschnitte den ihm zugehörigen Bogen finden kann; so läßt sich für jede gegebene Zeit bestimmen, an welchem Orte seiner Bahn er sich befindet, imgleichen wie groß zu der Zeit seine Geschwindigkeit ist, u. s. w.

Denn man darf nur die Fläche seiner Bahn in lauter gleiche Theile theilen, und aus seiner Umlaufszeit berechnen, welche Zeit erfordert wird, einen jeden solchen Theil zu durchlaufen.

Zus. 7. Alle diese Sätze setzen indessen, wie von selbst klar ist, voraus, daß die Bewegung des Körpers durch keine äußere Ursache geändert werde. Diese Bedingung aber findet in der Natur niemals statt. Denn da alle übrigen Körper um ihn gleichfals eine ursprüngliche Anziehungskraft besitzen; so wird er jeden Augenblick nicht bloß vom Körper S, sondern auch von allen übrigen Körpern angezogen, und dieses desto stärker von denen, die ihm am nächsten sind, und die größesten Massen haben (§. 39 und §. 20. Z. 3.), folglich ziehen ihn diese beständig aus seiner Bahn etwas hinaus, und zwar ungleich, weil er bey seinem Umlaufe um S ebendemselben anziehenden Körper, sowohl wenn dieser in Ruhe, oder selbst in Bewegung ist, zu einer Zeit weit näher ist, als zu einer andern. Hiedurch wird also die Bewegung des Körpers beständig gestöhrt, und wenn daher die aus dem Grundgesetze bestimmte mit der Erfahrung übereinstimmen soll; so müssen diese Stöhrungen oder Perturbationen erst besonders berechnet werden.

Lehrsatz 26.

Grundgesetz der Bewegung für mehrere Körper, die sich um einen und ebendenselben Körper bewegen.

§. 46. Wenn (Fig. 13.) zwey Körper T, A sich um einen dritten S bewegen; so verhalten sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten, wie die Cubi ihrer Weiten vom Körper S.

Beweis. Denn man setze, der Körper A durchlaufe während der Zeit, da der Körper T den unendlich kleinen Bogen TM durchläuft, den Bogen AD; so ist die Anziehung des Körpers S für den Körper A = AC, und für den Körper T = TN (§. 41.) Nun ist $AC : TN = TS^2 : AS^2$ (§. 39.) und $TN : AE = TS : AS$, weil die Sinus versi TN, AE desselben Winkels ASG sich, wie die Halbmesser TS, AS verhalten (Trig. §. 2. Z. 13.), folglich ist $AC : AE = TS^3 : AS^3$ (Arithm. §. 127.) Nun setze man, der Körper T befände sich auch in A; so würde er während der Zeit, da er vorhin durch TN lief, hier durch den Bogen AG laufen, wofern seine Umlaufszeit in A eben so groß seyn sollte, als sie für ihn in T ist, weil die Bogen AG, TM zu den ganzen Bahnen AGA, TMT einerley Verhältniß haben. Ist daher der Bogen AG n mal so groß als AD; so würde die Umlaufszeit r des Körpers T n mal kleiner seyn, als die Umlaufszeit R des Körpers A, folglich ist $r : R = AD : AG$. Nun ist $AC : AE = AD^2 : AG^2$ (§. 43. Z.), folglich $AC : AE = r^2 : R^2$ und $AC : AE = TS^3 : AS^3$ (p. dem.). Also $r^2 : R^2 = TS^3 : AS^3$.

Zus. 1. Wenn man daher die Umlaufszeiten zweyer Körper T, A um den dritten S kennt, mithin weiß, wie vielmal der Körper A später um ihn herumkommt, als der Körper T; so läßt sich das Verhältniß ihrer Distanzen TS, AS mit der größesten Leichtigkeit und Genauigkeit finden. Denn man darf nur aus dem Quadrat dieser Zahl die Cubik-

wurzel ausziehen, z. B. wenn die Umlaufszeiten der Körper T, A = 1 : 12 sind; so ist $TS^3 : AS^3 = 1 : 144$, folglich $AS^3 = 144\ TS^3$, folglich $AS = TS \cdot \sqrt[3]{144} = 5,24..TS$, also $AS : TS = 5,24... : 1$.

Zus. 2. Kennt man hingegen das Verhältniß der Distanzen TS, AS, so daß man weiß, wie vielmal die eine größer ist, als die andere; so läßt sich mit eben der Leichtigkeit und Genauigkeit das Verhältniß ihrer Umlaufszeiten r, R finden. Denn hier darf man nur aus dem Cubo dieser Zahl die Quadratwurzel ausziehen, z. B. wenn $TS : AS = 2 : 5,24..$ ist; so ist $r^2 : R^2 = 1 : 5,24^3.....$ folglich $R^2 = r^2 \cdot 5,24^3..$, mithin $R = r\sqrt{5,24^3..}$ also $R : r = 12 : 1$.

Anmerkung.

Da im Beweise des 26sten Lehrsatzes angenommen worden, daß die Bogen AG, TM zu ihren Bahnen einerley Verhältniß haben, dieses aber nur dann klar ist, wenn beyde Bahnen Cirkel sind, und da der Satz $AC : AE = AD^2 : AG^2$ (§. 43. Z.) gleichfals nur für Cirkel bewiesen worden, so könnte es scheinen, daß dies Grundgesetz der Bewegung bloß für Cirkelbahnen gelte, nicht aber für andere. Allein da im Beweise der Bogen TM als der unendlichvielste Theil seiner Bahn o und der Bogen AG als der unendlichvielste Theil seiner Bahn O angenommen worden; so kommen sie, zu welcher krummen Linie sie irgend gehören mögen, im strengsten Sinn mit unendlich kleinen Cirkelbogen überein, und der §. 43. Z. erwiesene Satz gilt daher für alle mögliche Bahnen überhaupt, und da ferner alle unendlichvielste Theile der Bahn o dem Theile TM, und alle unendlichvielste Theile der Bahn O dem Theile AG gleich sind, und die Menge dieser gleichen Theile, weil die Bogen AG, TM zu eben demselben Winkel ASG gehören

hören, ebenfals in beyden Bahnen gleich groß ist; so ist offenbar der Bogen AG in der Bahn O eben so vielmal enthalten, als der Bogen TM in der Bahn o. Also gilt dieses Grundgesetz ganz allgemein für alle mögliche Bahnen.

Da ferner in jeder Bahn, die kein Cirkel ist, die Distanzen vom Körper S ungleich sind; so könnte die Frage entstehen, welche von diesen Distanzen im 26sten Lehrsatz gemeynt sey. Allein da die Bahn in unendlich viele gleiche Bogen getheilt worden, von denen ein jeder als ein Cirkelbogen anzusehen ist, hiedurch also im Beweise alle Distanzen gleich gemacht worden sind; so kann in demselben nur diejenige verstanden werden, die das Mittel von allen zusammengenommen ist, und daher die mittlere genannt wird.

Lehrsatz 27.

§. 47. Wenn (Fig. 13.) zwey Körper A, T sich um einen dritten S in Cirkeln bewegen; so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten C, c umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus ihren Distanzen AS, TS, d. i. $C : c = \sqrt{TS} : \sqrt{AS}$.

Beweis. Denn man setze die Umlaufszeit des Körpers $A = R$, und die Umlaufszeit des Körpers $T = r$, so ist $r = \frac{o}{c}$, und $R = \frac{O}{C}$ (§. 8. Z. 4.), folglich $r : R = \frac{o}{c} : \frac{O}{C}$. Nun ist $o : O = TS : AS$ (Geom. 192. Z. 2.), folglich $r : R = \frac{TS}{c} : \frac{AS}{C}$ folglich $r : R = C \,.\, TS : c \,.\, AS$, mithin $r^2 : R^2 = C^2 \,.\, TS^2 : c^2 \,.\, AS^2$. Nun aber ist $r^2 : R^2 = TS^3 : AS^3$ (§. 46.), folglich $C^2 \,.\, TS^2 : c^2 \,.\, AS^2 = TS^3 : AS^3$, mithin $C^2 : c^2 = TS : AS$, also $C : c = \sqrt{TS} : \sqrt{AS}$.

Zus. 1. Wenn daher (Fig. 12.) die Bahn des Körpers A, der sich um den Körper S bewegt, von der Art ist, daß er in A von S am weitesten entfernt ist, nachher aber, indem er durch den Theil ADS geht, sich dem Körper S immer mehr nähert, bis er ihm in P am nächsten ist; so verhält sich seine Geschwindigkeit in A zu der in jedem andern Punkte D, wie die Quadratwurzel aus DS zur Quadratwurzel aus AS. Denn wenn man sich den Bogen ADP in unendlich viele gleiche Theile getheilt imaginirt; so kommen die unendlich kleinen Bogen AM, DO mit den Cirkelbogen, die man sich zwischen A, M und D, O denkt, vollkommen überein, also ist es eben so viel, als ob der Körper in A sich bis M in einem Cirkel bewegte, dessen Halbmesser = AS ist, in D aber bis O in einem Cirkel, dessen Halbmesser = DS ist.

Zus. 2. Also verhält sich die Geschwindigkeit im Punkte P, wo der Körper A dem Körper S am nähesten ist, zur Geschwindigkeit in A, wo er von S am weitesten weg ist, wie die Quadratwurzel aus der größesten Weite AS zur Quadratwurzel aus der kleinsten Weite PS, (Z. 1.) z. B. wenn AS 4mal so groß ist, als PS; so ist seine Geschwindigkeit in P 2mal größer, als in A.

Zus. 3. Da (Fig. 11.) die Geschwindigkeit des Körpers A mit dem unendlich kleinen Bogen AD, den er durchläuft, dieser aber mit der Wurfkraft AB übereinkommt; so gelten diese 3 Sätze auch von den Wurfkräften.

Lehrsatz 28.

§. 48. Wenn (Fig. 13.) zwey Körper T, A sich um einen dritten S in Cirkeln bewegen; so verhalten sich ihre Centralkräfte TN, AC d. i. sowohl die vis centripeta als die vis centrifuga, umgekehrt, wie die Cubi ihrer Distanzen von S.

Beweis. Denn man setze, in der Zeit da der Körper T den unendlich kleinen Bogen TM durchläuft, durchlaufe der Körper A den Bogen AD; so würde, wenn der Körper T gleichfals in A wäre, derselbe den Bogen AG durchlaufen, weil die Bogen AG, TM zu ihren ganzen Cirkeln einerley Verhältniß haben, folglich würde hier die Centralkraft des Körpers T = AE seyn. Nun setze man, die Umlaufszeit des Körpers T = r, und des Körpers A = R; so ist $r^2 : R^2 = TS^3 : AS^3$ (§. 46.). Nun aber ist $r : R = AD : AG$, folglich $r^2 : R^2 = AD^2 : AG^2$, mithin $AD^2 : AG^2 = TS^3 : AS^3$. Da nun $AD^2 : AG^2 = AC : AE$ ist (§. 43. Z.); so ist $AC : AE = TS^3 : AS^3$, mithin, da $AE = TN$ ist, $AC : TN = TS^3 : AS^3$, oder $TN : AC = AS^3 : TS^3$.

Zus. 1. Wenn daher (Fig. 14.) der Körper A in A am weitesten von S weg ist, nachher aber, indem er durch D nach P geht, dem Körper S immer näher kommt, bis er in P ihm am näheſten ist; so verhalten sich seine Centralkräfte in A zu denen in D, wie $DS^3 : AS^3$. Denn da die Bogen AM, DO, als unendlich klein angenommen werden müssen; so sind sie als vollkommene Cirkelbogen anzusehen, wie §. 47. Z. 1.

Zus. 2. Also verhält sich die Centralkraft in P, wo der Körper A dem Körper S am näheſten iſt, zur Centralkraft in A, wo er von S am weiteſten weg iſt, wie $AS^3 : PS^3$ (Z. 1.) z. B., wenn AS 4mal größer iſt als PS; so iſt die Centralkraft in P 64mal größer, als in A.

Zus. 3. Da die Wurfkraft c in P sich zur Wurfkraft C in A verhält wie $\sqrt{AS} : \sqrt{PS}$ (§. 47. Z. 2. 3.), folglich $c : C = \sqrt{AS} : \sqrt{PS}$ iſt; so iſt $c^2 : C^2 = AS : PS$, mithin $c^6 : C^6 = AS^3 : PS^3$. Nun verhalten sich die Centralkräfte in P zu denen in A ebenfals wie $AS^3 : PS^3$ (Z. 2.). Also verhalten sich die Centralkräfte in P zu denen in A, wie die 6te Potenz der Wurfkraft in P zur 6ten Potenz der Wurfkraft in A. Z. B. wenn AS 4mal größer als PS iſt; so iſt die Centralkraft in P 64mal größer als in A, die Wurfkraft in P aber 2mal größer als in A (§. 38. Z. 3.), allein 64 iſt die 6te Potenz von 2.

Anmerkung 1.

Da der Körper A, indem er durch ADP geht, sich dem Körper S beſtändig nähert, und zwar immer ſtärker, je näher er nach P kommt; so frägt es sich, warum er diese Annäherung nicht immer fortſetzt, sondern vom Punkte P an sich wieder von S immer mehr entfernt. Man erklärt dieses gewöhnlich daher, weil in P die vis centrifuga weit ſtärker iſt, als die vis centripeta, in dem die erſte nach dem Verhältniß der Cubi, die zweyte aber nur nach dem Verhältniß der Quadrate der Diſtanzen wächſt, z. B. wenn AS 4mal so groß iſt, als PS, so iſt die vis centripeta nur 16mal größer in P, als in A, die vis centrifuga aber 64mal, also müſſe diese den Körper von P an wieder entfernen. Allein ich muß geſtehen, daß diese Erklärung mich nicht befriedigt. Denn

der Satz, daß die Centralkräfte sich umgekehrt wie die Cubi der Distanzen verhalten, gilt, vermöge des Beweises, eben so wohl für die vis centripeta, als vis centrifuga, und überhaupt sind diese beiden Kräfte beständig einander gleich. Denn bey der Bewegung eines Körpers A um einen andern S bedeutet die vis centrifuga diejenige Linie DB, um welche die Wurfkraft AB (Fig. 10.) allein den Körper A, während er durch den Bogen AD geht, von S entfernen würde, und welcher also die dieses verhindernde Anziehungskraft oder vis centripeta AC beständig gleich ist (§. 41.). Außerdem aber würde aus jener Erklärung folgen, daß der Körper A schon weit früher, ehe er nach P käme, anfangen müßte, sich von S zu entfernen. Denn man setze z. B. (Fig. 12.) AS = 4, DS = 2; so würde in D seine vis centrifuga = 8, seine vis centripeta aber = 4, folglich jene 2 mal so groß als diese seyn, und man würde also mit Recht fragen, warum der Körper sich nicht schon lange vorher, ehe er nach D kam, von S entfernt hätte. Wollte man sagen, dies käme daher, weil die Wurfkraft in D mit dem radius vector DS einen spitzen Winkel machte, und daher die Diagonale des Parallelogramms noch immer zwischen ihr und DS fiele; so würde man selbst gestehen, daß der Anfang des Entfernens nicht von der Größe der vis centrifuga, sondern von der Größe und Richtung der Wurfkraft abhange. Das ganze Mißverständniß besteht bloß darin, daß man den Satz: die Anziehungskräfte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Distanzen, ganz unrichtig auf das Verhältniß derjenigen Anziehungskräfte anwendet, welche zur Bewegung eines Körpers um einen andern erfordert werden. Denn das Verhältniß dieser hängt nicht bloß von den Distanzen ab, sondern hier wird die erforderliche Anziehungskraft jedesmal von der Wurfkraft bestimmt. Man setze z. B. AS sey 4 mal so groß als PS; so ist die Anziehungskraft in P an sich betrachtet, allerdings 16 mal so groß, als in A. Allein in P ist zugleich die Wurfkraft 2 mal größer, als in A (§. 38. Z. 3.), folglich ist der Bogen, den der Körper durchlaufen muß, um die erforderliche Anziehungskraft zu erhalten, in P zweymal so groß, als in A. Nun verhalten sich die Anziehungskräfte wie die Quadrate dieser unendlich kleinen Bogen (§. 43. Z.), folglich giebt der 2 mal größere Bogen in P eine 4 mal größere Anziehungs-

kraft, als der einfache geben würde, mithin ist die Anziehungskraft, die der Wurfkraft in P zugehört, nicht = 16, sondern = 4mal 16 = 64, d. i. nicht den Quadraten sondern den Cubis der Distanzen PS, AS umgekehrt proportional. Wäre dieses nicht; so stünden auch der 28ste und 26ste Lehrsatz mit dem 20sten in wirklichem Widerspruch, indem der 28ste aus dem 26sten, und dieser aus dem 20sten hergeleitet worden.

Die wahre Ursache, woher der Körper A gerade in P anfangen muß, sich von S zu entfernen, ist, nach meiner Einsicht, vielmehr bloß diese: Wenn der Körper von A durch D nach P geht; so macht die Richtung seiner Wurfkraft mit dem Radius vector einen spitzen Winkel, und verliert also einen Theil von ihrem Bestreben, den Körper A von S zu entfernen. Kommt er in die Nähe von S, z. B. nach O; so nähert sich dieser Winkel, den die Wurfkraft mit dem radius vector macht, immer mehr dem rechten, mithin kann sie, da ohnehin zugleich ihre Größe wächst, ihre Kraft, den Körper zu entfernen, schon mit geringerm Verlust ausüben, und die continuirliche Zunahme der Annäherung nach S wird immer geringer. Kommt der Körper nach P selbst; so macht die Wurfkraft mit dem radius vector einen rechten Winkel, folglich verliert sie hier von ihrer Kraft, den Körper von S zu entfernen, gar nichts, und da sie zugleich stärker geworden, als sie in den vorigen Augenblicken war; so ist offenbar; daß dieses Entfernen hier wirklich erfolgen, mithin gerade in P anfangen muß. Rückt der Körper von P fort; so fängt der Winkel, den die Wurfkraft mit dem radius vector macht, an, stumpf zu werden, mithin, vermöge dieser Richtung, den Körper um so mehr zu entfernen, und so muß dieses fortgehen, bis er sich wieder in A am weitesten entfernt hat.

Anmerkung 2.

Diese beyden ersten Abschnitte enthalten die vollständige Grundlage der ganzen physischen Astronomie, und alle ihre Sätze werden durch die letztere aufs vollkommenste bestätigt.

Dritter Abschnitt.

Von der Schwere der Körper.

Erklärung 21.

§. 49. Die ursprüngliche Anziehungskraft der Erde, vermöge welcher ihr Anziehungspunkt den Anziehungspunkt eines jeden Körpers anzieht, heißt die Schwerkraft der Erde, oder die Schwere der Körper (grauitas). Der Anziehungspunkt der Erde heißt ihr Schwerpunkt, und der Anziehungspunkt eines jeden andern Körpers heißt gleichfals sein Schwerpunkt (centrum grauitatis). Die gerade Linie zwischen dem Schwerpunkt der Erde und dem Schwerpunkt des Körpers heißt die Directionslinie der Schwere, ingleichen die Schwerlinie, oder Schwerdurchmesser (diameter grauitatis) imgleichen eine Verticallinie und jede Ebene, die durch diesen geht, eine Schwerebene (planum grauitatis), oder Verticalfläche. Jede Ebene auf der Erde, welche auf der Verticalfläche senkrecht ist, heißt eine Horizontalfläche, und jede Linie, die in der Horizontalfläche liegt, heißt eine Horizontallinie. Ein Körper fällt, wenn er sich dem Schwerpunkt der Erde nähert. Entfernt er sich hingegen von diesem, so steigt er. Die Größe der Linie, durch welche der Körper

fällt, oder steigt, heißt die Höhe des Falls oder Steigens.

Zus. 1. Also kann man die ganze Schwere eines jeden Körpers so ansehen, als ob sie in seinem Schwerpunkt vereinigt wäre (§. 38. Z. 1.).

Zus. 2. Wenn daher ein Körper in seinem Schwerdurchmesser unterstützt wird; so kann er nach keiner Seite fallen, und bleibt also ganz in Ruhe (Z. 1.).

Zus. 3. Was daher den Körper in seinem Schwerdurchmesser unterstützt, trägt die Schwere des ganzen Körpers (Z. 1. 2.).

Zus. 4. Da die Schwere die ursprüngliche Anziehungskraft der Erde ist; so wirkt sie auf jeden Körper unaufhörlich, er mag in Ruhe oder in Bewegung seyn (§. 20. Z. 2.).

Zus. 5. Die Wirkungen der Schwere auf zwey ungleich entfernte Körper verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen vom Schwerpunkte der Erde, d. i. die Geschwindigkeit, mit welcher die Schwere die Körper zu bewegen strebt, nimmt mit dem Quadrat der Entfernungen ab (§. 39.).

Zus. 6. Also wirkt die Schwere auf alle gleichweit entfernte Körper gleich stark, d. i. sie fallen alle gleichgeschwinde, von welcher Art sie irgend seyn mögen (Z. 5.).

Zus. 7. Da eine mäßige Höhe, z. B. von 1000 oder 2000 Fuß gegen die Entfernung der Oberfläche der Erde von ihrem Schwerpunkt wenig in Betrachtung kommt; so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß während der Zeit, da

ein Körper von einer mäßigen Höhe auf die Erde fällt, die Schwere beständig gleich stark auf ihn wirkt (Z. 6.).

Zus. 8. Also ist sowohl der freye d. i. ungehinderte Fall, als das freye Steigen bey einer mäßigen Höhe eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (§. 35. und §. 35. Z. 1.).

Zus. 9. Die Geschwindigkeiten, die ein freyfallender Körper am Ende zweyer Zeiten erlangt hat, verhalten sich, wie die Zeiten, in denen er sie erlangt hat (§. 35. Z. 2.).

Zus. 10. Wenn ein Körper frey fällt; so verhalten sich die Höhen, durch welche er fällt, wie die Quadrate der Zeiten, in welchen er gefallen ist (§. 36.), ingleichen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, die er am Ende des Falls durch beyde Höhen erlangt hat (§. 36. Z. 2.).

Zus. 11. Die Höhen, durch welche ein Körper in jeder Secunde frey fällt, nehmen nach der Ordnung der ungeraden Zahlen zu, nämlich in der zweyten Secunde 3 mal tiefer, in der dritten 5 mal tiefer ꝛc., als in der ersten (§. 36. Z. 1.).

Zus. 12. Die Geschwindigkeit, die der Körper in einer gewissen Zeit durch den freyen Fall von einer Höhe erlangt, ist so groß, daß er mit derselben in eben der Zeit gleichförmig eine zweymal so große Linie durchlaufen kann (§. 36. Z. 3.).

Zus. 13. Wenn ein Körper einen andern in seinem Schwerdurchmesser unterstützt, und ihn daher zu fallen hindert, so bestrebt sich der letztere den er-

stern nach eben der Richtung zurückzustoßen, d. i. der letztere muß den erstern drucken.

Anmerkung.

Alle diese Sätze werden durch die allgemeine Erfahrung aufs vollkommenste bestätigt, und sind daher zugleich die vollkommenste Bestätigung, daß die Schwere nichts anders, als die Anziehungskraft der Erde ist.

Erklärung 22.

§. 50. Der Druck, den ein schwerer Körper auf einen andern, der unter ihm liegt, nach der Richtung seines Schwerdurchmessers ausübt, heißt sein Gewicht (pondus).

Zus. 1. Da nun jede Kraft, mit welcher ein Körper den andern bewegt, oder zu bewegen strebt, dem Product aus der Masse in die Geschwindigkeit gleich ist (§. 15. Z. 11.); so verhalten sich die Gewichte zweyer Körper, wie die Producte aus ihren Massen in die Geschwindigkeiten, mit welchen die Schwere sie nach der Erde zieht. Nennt man also ihre Gewichte P, p, ihre Massen M, m, und ihre Geschwindigkeiten C, c; so ist $P : p = MC : mc$.

Zus. 2. Wenn daher die Geschwindigkeiten, mit welchen die Schwere zwey Körper nach der Erde zieht, gleich sind; so verhalten sich ihre Gewichte, wie ihre Massen (Z. 1.).

Zus. 3. Also verhalten sich die Gewichte zweyer vom Schwerpunkt der Erde gleich weit entfernter Körper, jederzeit, wie ihre Massen (§. 40. Z. 6.).

Zus. 4. Wenn daher zwey vom Schwerpunkt der Erde gleich weit entfernte Körper gleich viel

wiegen; so sind ihre Massen gleich (Z. 3.), d. i. die Menge der Materie ist in beyden einerley.

Zus. 5. Wenn ein Körper A durch irgend eine Kraft in einem andern C eine gleiche Bewegung hervorbringt, oder hervorzubringen strebt, als ein Körper B durch sein Gewicht; so ist die Größe der bewegenden Kräfte einerley (§. 15. Z. 11.) Also läßt sich die Größe einer jeden bewegenden Kraft durch ein Gewicht ausdrücken.

Zus. 6. Da sich, bey gleichen Entfernungen zweyer Körper von der Erde, ihre Gewichte, wie ihre Massen verhalten (Z. 3.), die ursprünglichen Anziehungskräfte zweyer Körper auf gleiche Entfernungen sich gleichfals wie ihre Massen verhalten (§. 20. Z. 3.); so verhalten sich die Gewichte zweyer Körper in gleichen Entfernungen von der Erde, wie ihre ursprünglichen Anziehungskräfte.

Anmerkung.

Aus dem dritten Zusatz ist nunmehr klar, daß, obgleich alle Körper ins Unendliche theilbar sind, sich dennoch das Verhältniß der Menge der Materie, die sie enthalten, durch ihr Gewicht, d. i. durch die Quantität der Bewegung, die sie durch die Schwere erhalten, genau bestimmen läßt.

Erklärung 23.

§. 51. Die Größe des Raums den ein Körper einnimmt, heißt sein Rauminhalt, oder Volumen. Das Verhältniß der Masse eines Körpers zu seinem Volumen heißt seine Dichtigkeit (densitas).

Zus. 1. Wenn daher zwey Körper ein gleiches Volumen haben; so verhalten sich ihre Dichtigkeiten, wie ihre Massen, mithin auch wie ihre Gewichte (§. 50. Z. 3.), d. i. wenn man ihre Dichtigkeiten D, d nennt; so ist, bey gleichem Volumen, D : d = M : m, imgleichen D : d = P : p.

Zus. 2. Wenn hingegen zwey Körper gleiche Massen oder Gewichte haben; so verhalten sich ihre Dichtigkeiten umgekehrt wie ihre Volumens, d. i. wenn man die Volumens V, v nennt; so ist, bey gleichen Massen oder Gewichten, D : d = v : V.

Denn wenn der Körper A ein n mal größeres Volumen hat, als der Körper B; so ist der nte Theil seines Raums eben so groß, als der ganze Raum des Körpers B, und enthält zugleich n mal weniger Materie, als der ganze Körper. Nun aber enthält A eben so viel Masse d. i. eben so viel Materie, als B (p. hyp.), folglich enthält der nte Theil des Raums im Körper A n mal weniger Materie, als der Körper B, folglich ist seine Dichtigkeit, und daher auch die Dichtigkeit des Körpers A überhaupt n mal kleiner, als die Dichtigkeit des Körpers B, mithin giebt, bey gleichen Massen ein n mal größeres Volumen eine n mal kleinere Dichtigkeit. Also verhalten sich hier die Dichtigkeiten umgekehrt, wie die Volumens (Arithmet. §. 119.).

Zus. 3. Also sind die Dichtigkeiten zweyer Körper A, B im zusammengesetzten directen Verhält-

niß ihrer Massen oder Gewichte, und dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Volumens, d. i.

$D : d = \binom{M : m}{v : V}$, imgleichen $D : d = \binom{P : p}{v : V}$.

Denn man nehme einen dritten Körper C an, der mit dem ersten Körper A ein gleiches Volumen V, und mit dem zweyten B eine gleiche Masse m hat, und nenne seine Dichtigkeit δ;

so ist $D : \delta = M : m$ (Z. 1.)
und $\delta : d = v : V$ (Z. 2.)

also $D : d = \binom{M : m}{v : V}$,

mithin auch $D : d = \binom{P : p}{v : V}$.

Zus. 4. Druckt man also das Verhältniß der Gewichte und der Volumens durch Zahlen aus; so verhalten sich die Dichtigkeiten zweyer Körper, wie die Quotienten aus ihren Gewichten durch ihre Volumens, d. i. $D : d = \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$. Denn hier ist

$D : d = Pv : pV$ (Z. 3.) $= \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$.

Zus. 5. Wenn sich daher die Gewichte zweyer Körper, wie ihre Volumens verhalten; so sind beyde Körper gleich dicht. Denn wenn $P : p = V : v$ ist; so ist $D : d = Pp : Pp$ (Z. 3.), also $D = d$.

Zus. 6. Nimmt man den zweyten Körper zur Einheit, so daß man $d = 1$, $p = 1$, $v = 1$ setzt; so bekommt man die Dichtigkeit eines jeden andern

Körpers, wenn man sein Gewicht durch sein Volumen dividirt, d. i. $D = \frac{P}{V}$ (Z. 4.).

Zus. 7. Also bekommt man das Gewicht des Körpers, wenn man sein Volumen durch seine Dichtigkeit multiplicirt, sein Volumen hingegen, wenn man sein Gewicht durch seine Dichtigkeit dividirt, d. i. $P = DV$, und $V = \frac{P}{D}$ (Z. 6.)

Lehrsatz 29.

§. 52. Wenn die Erde eine vollkommene Kugel und überall gleich dicht ist; so liegt ihr Schwerpunkt in ihrem Centro.

Beweis. Denn wenn sie überall gleich dicht ist; so enthält sie überall eine gleiche Menge materieller Punkte. Man setze also (Fig. 15.) ein Punkt A sey über der Erde; so wird er von jedem materiellen Punkt der Erde angezogen. Man ziehe also aus A die gerade Linie AD, die durch ihr Centrum C geht; so ziehen alle Punkte B, F, C, G, D ꝛc. dieser Linie den Körper A nach dem Centro C hin. Nun nehme man in der Oberfläche der Erde ein Paar beliebige Punkte E, H an, die von A gleich weit entfernt sind; so zieht der Punkt E den Körper A nach AE, und der Punkt H nach AH, folglich beide zusammen nach der Diagonale AI des Parallelogramms AEIH, und da die Dreyecke EAH, EIH gleichschenklicht sind; so halbirt AI die Sehne EH in K, und steht auf ihr senkrecht, mithin geht AI durchs Centrum C, also ziehen auch die

Punkte E, H den Körper A nach dem Centro C. Eben dieses gilt auch von jedem andern Paar Punkte L, M, die in der Sehne EH liegen. Denn sie ziehen den Körper A gleichfals nach der Diagonale AI des Parallelogramms LAMI, welche die Linie LM in der Mitte K der Sehne EH halbirt, und auf ihr senkrecht ist, mithin durchs Centrum C geht. Also ziehen alle Punkte der Sehne EH den Körper A nach dem Centro C. Nun stelle man sich durch jeden Punkt des Durchmessers unendlich viele dergleichen Sehnen mit EH parallel vor; so ist auf eben die Art klar, daß alle ihre Punkte den Körper A gleichfals nach C ziehen. Also ziehen alle Punkte des größesten Kugelkreises den Körper A nach C, und da dieses eben so von allen größesten Kreisen der Kugel, mithin von der ganzen Kugel gilt; so zieht die ganze Erde, wenn sie eine vollkommene Kugel ist, jeden Körper A nach ihrem Centro C. Also ist dieses ihr Anziehungspunkt (§. 38.) mithin ihr Schwerpunkt (§. 49.).

Zus. 1. Da nun alle Halbmesser der Kugel auf ihrer Oberfläche senkrecht sind; so fallen in diesem Falle alle schweren Körper auf die Oberfläche der Erde senkrecht.

Zus. 2. Ist hingegen die Erde nicht eine vollkommene Kugel, und nicht überall gleich dicht; so ist aus dem gegebenen Beweise von selbst klar, daß ihr Schwerpunkt nicht in ihrem Centro liegen kann.

Anmerkung.

Durch die angestellten Messungen der Erde in weit von einander entfernten Gegenden hat sich gefunden, daß sie nicht eine vollkommene Kugel ist, sondern daß ihre Oberfläche unter dem Aequator von ihrem Centro weiter weg liegt, als nach den Polen hin, und ob sie überall gleich dicht sey, ist schwer zu entscheiden. Also kann ihr Schwerpunkt nicht in ihrem Centro liegen. Indessen beträgt diese Abweichung so wenig, daß man da, wo es nicht auf vollkommene Schärfe ankommt, ohne Bedenken annehmen kann, daß die Schwere die Körper nach dem Centro der Erde zieht.

Lehrsatz 30.

§. 53. Wenn ein Körper frey fällt; so bekommt man die Höhe, durch welche er in einer gegebenen Anzahl Secunden fällt, wenn man die Höhe, durch welche er in einer Secunde fällt, durch das Quadrat der gegebenen Secundenzahl multiplicirt, d. i. wenn man die Höhe, durch welche der Körper in einer Secunde fällt $= g$, und die Höhe durch welche er in t Secunden fällt, $= a$ setzt; so ist $a = gt^2$.

Beweis. Denn da sich die Höhen des Falls wie die Quadrate der Zeiten verhalten (§. 49. Z. 10.); so ist $1 : t^2 = g : a$, also $a = gt^2$.

Z. B. In Frankreich hat man gefunden, daß die Körper daselbst in einer Secunde 15,625 Rheinländische Fuß fallen, also ist hier $g = 15{,}625$ Rheinl. Fuß, mithin $a = 15{,}625 . t^2$ in Rheinl. Fußen. Gesetzt also ein Körper falle 10 Secunden; so ist die Höhe a, von welcher er gefallen ist, $= 15{,}625 \times 100 = 1562{,}5$ Rh. Fuß.

Zus.

Zus. Also bekommt man umgekehrt die Zeit, in welcher ein Körper von einer gegebenen Höhe fällt, wenn man diese Höhe durch die Höhe, die er in einer Secunde fällt, dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel auszieht, d. i. $t = \sqrt{\frac{a}{g}}$. Z. B. wenn die Höhe, durch die er gefallen ist, in Rheinl. Fußen gegeben ist; so ist die Zahl der Secunden, die er dazu braucht $= \sqrt{\frac{a}{15,625}} = \sqrt{0,064 \cdot a}$. Denn da $a = gt^2$; so ist $t^2 = \frac{a}{g}$, also $t = \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Lehrsatz 31.

§. 54. Die Geschwindigkeit c, die ein Körper durch den Fall von einer Höhe erlangt hat, bekommt man, wenn man aus dem Product der 4fachen Höhe für eine Secunde in die gegebene Höhe die Quadratwurzel auszieht, d. i. $c = \sqrt{4ga}$, mithin wenn die Höhe in Rheinl. Fußen gegeben ist, $c = \sqrt{62,5 \cdot a}$

Beweis. Denn wenn der Körper in t Secunden von der Höhe a fällt; so ist $t = \sqrt{\frac{a}{g}}$. Nun ist am Ende des Falls seine Geschwindigkeit c so groß, daß er mit derselben in eben der Zeit einen Weg von 2a gleichförmig durchlaufen kann (§. 49. Z. 12.), folglich ist $\sqrt{\frac{a}{g}} : 1'' = 2a : c$, mithin

Bayerische Staatsbibliothek München

$\frac{a}{g} : 1 = 4a^2 : c^2$, mithin $c^2 = 4ga$, also $= c = \sqrt{4ga}$.

Zus. Also bekommt man die Höhe des Falls, wenn man das Quadrat der erlangten Geschwindigkeit durch die 4fache Höhe für eine Secunde dividirt, d. i. $a = \frac{c^2}{4g}$, mithin in Rheinländ. Fußen $a = \frac{c^2}{62,5} = 0,016 \,.\, c^2$.

Vierter Abschnitt.

Von der Bewegung geworfener Körper.

Lehrsatz 32.

§. 55. Wenn ein Körper B (Fig. 16.) von einer Höhe vertical hinab geworfen wird; so nimmt sein Fall nach dem Quadrat der Zeit zu, und man bekommt die Höhe seines Falls, wenn man zu dem Product seiner Wurfsgeschwindigkeit in die Zeit des Falls das Product aus der Höhe des Falls in einer Secunde in das Quadrat der Zeit des Falls addirt, d. i. wenn die Wurfsgeschwindigkeit = a Fuß in jeder Secunde, und der Fall in einer Secunde = g ist; so ist sein Fall durch die Höhe BE in t Secunden $= at + gt^2$, mithin in Rheinl. Fußen $= at + 15,625 \,.\, t$.

Bayerische Staatsbibliothek München

Beweis. Denn da die Wurfbewegung gleichförmig ist (§. 26); so ist die durch diese allein durchlaufene Höhe BA = at (§. 8. Z. 3.). Nun aber wirkt zugleich die Schwere auf ihn unaufhörlich, (§. 49. Z. 4.), und vermöge dieser ist die Höhe seines Falls = gt^2 (§. 53.). Da nun beyde Bewegungen nach einerley Richtung gehen; so ist die ganze Höhe des Falls durch BE = $at + gt^2$ (§. 10.), und die Höhe des Falls BA = at wächst also nach dem Quadrat der Zeit t^2.

Lehrsatz 33.

§. 56. Wenn (Fig. 16.) ein Körper E, mit der Geschwindigkeit von a Fuß in jeder Secunde, vertical in die Höhe geworfen wird; so nimmt sein Steigen nach dem Quadrat der Zeit ab, und man bekommt die Höhe EA, zu welcher er steigt, wenn man vom Product seiner Wurfsgeschwindigkeit in die Zeit seines Steigens das Produkt aus der Höhe des Falls in einer Secunde in das Quadrat dieser Zeit subtrahirt, d. i. EA = $at — gt^2$, mithin in Rheinl. Fußen EA = at — 15,625 . t.

Beweis. Denn vermöge der Wurfkraft würde er zur Höhe EB = at steigen, die Schwere aber zieht ihn durch BA = gt^2 herunter, also steigt er nur durch EA = $at — gt^2$ (§. 11.), und die Höhe seines Steigens EB = at nimmt nach dem Quadrat der Zeit t^2 ab.

Lehrsatz 34.

§. 57. Wenn ein Körper E mit der Geschwindigkeit von a Fuß in jeder Secunde vertical in die Höhe geworfen wird; so bekommt man 1) die Zahl t der Secunden, nach welchen er seine größeste Höhe EA erreicht, wenn man seine Wurfsgeschwindigkeit durch die doppelte Höhe des Falls in einer Secunde dividirt, d. i. $t = \frac{a}{2g}$ mithin in Rheinl. Fußen $t = \frac{a}{31,25}$;

2) die Höhe EB, die er in dieser Zeit durch die bloße Wurfkraft gestiegen seyn würde, wenn man das Quadrat seiner Wurfgeschwindigkeit durch die doppelte Höhe des Falls in einer Secunde dividirt, d. i. $EB = \frac{a^2}{2g}$, mithin in Rheinl. Fußen $EB = \frac{a^2}{31,25}$.

3) Die Höhe EA, die er wirklich ersteigt, ist halb so groß, als die Höhe EB, die er durch die Wurfkraft ungehindert erstiegen hätte, d. i. $EA = \frac{a^2}{4g}$, mithin in Rheinl. Fußen $EA = \frac{a^2}{62,5}$.

Beweis Denn indem die Wurfkraft den Körper E in die Höhe treibt, zieht ihn die Schwere mittlerweile beständig hinab. Nun nimmt die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende eines jeden Falls erlangt, im Verhältniß der Zeit zu (§. 49. Z. 9.), folglich muß sie einmal der Wurfsgeschwin-

digkeit a gleich werden, und so das Steigen aufhören. Gesetzt nun, dieses geschehe nach t Secunden, in denen die Wurfkraft den Körper E durch die Linie EB getrieben, die Schwere aber ihn durch BA zurückgezogen, so daß hier seine durchs Fallen erlangte Geschwindigkeit $= a$ geworden, und er also in A zu steigen aufhört; so ist $BA = \frac{a^2}{4g}$ (§. 54. Z.), und $t = r\frac{BA}{g}$ (§. 53. Z.) $= r\frac{a^2}{4g^2}$, also

1) $t = \frac{a}{2g}$.

Nun ist ferner die mit der Wurfsgeschwindigkeit a in t Secunden gleichförmig durchlaufene Linie $EB = at$ (§. 8. Z. 3.) folglich 2) $EB = \frac{a^2}{2g}$.

Da nun $BA = \frac{a^2}{4g}$; so ist $BA = \frac{1}{2}EB$, folglich auch $EA = \frac{1}{2}EB = BA$, also 3) EA halb so groß als EB, d. i. $EA = \frac{a^2}{4g}$.

Lehrsatz 35.

§. 58. Die Zeit T, nach welcher ein mit der Geschwindigkeit von a Fuß in jeder Secunde vertical in die Höhe geworfener Körper E wieder in E zurückkommt, bekommt man, wenn man seine Wurfsgeschwindigkeit durch die Höhe des Falls in einer Secunde dividirt, d. i. $T = \frac{a}{g}$, mithin in Rheinl. Fußen $T = \frac{a}{15,625}$.

Z. B. wenn ein Körper so geworfen wird, daß er in jeder Secunde durch 125 Fuß läuft; so kommt er nach 8 Secunden zurück, weil $\frac{125}{15,625} = 8$ ist.

Beweis. Denn wenn der Körper in A seine größeste Höhe erreicht hat, und die Wurfkraft erschöpft ist, so zieht ihn die Schwere nach E zurück, und da AE = BA (§. 57.); so fällt er durch AE in einer gleichen Zeit t, in welcher er während dem Steigen durch BA gefallen war. Also ist die ganze Dauer T seines Steigens und Zurückfallens

$= 2t = \frac{2a}{2g}$ (§. 57. n. 1.), d. i. $T = \frac{a}{g}$.

Lehrsatz 36.

§. 59. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein vertical in die Höhe geworfener Körper E wieder nach E zurückkommt, ist eben so groß als die Geschwindigkeit a, mit welcher er in die Höhe geworfen wurde.

Beweis. Denn indem er von der größesten Höhe A nach E zurückfällt, so hat er, weil AE = BA ist (§. 57. n. 3.), in E durch den Fall AE eben die Geschwindigkeit erlangt, die er in A durch den Fall BA erlangt hatte. Diese aber war = a (§. 57. n. 1.), also ist auch jene = a.

Lehrsatz 37.

§. 60. Wenn ein Körper frey von der Höhe A nach E gefallen ist; so ist seine Geschwindigkeit in E so groß, daß wenn er mit derselben vertical in

die Höhe geworfen wird, er binnen eben der Zeit wieder eben so hoch steigt.

Beweis. Denn seine Geschwindigkeit ist in E so groß, daß er mit derselben in eben der Zeit t, in welcher er durch AE fiel, gleichförmig eine Linie EB durchlaufen kann, die 2 mal so groß ist, AE (§. 49. Z. 12.). Allein wenn der Körper durch den Wurf in der Zeit t vertical durch EB läuft; so fällt er in dieser Zeit durch eine Linie BA, die eben so groß ist, als AE (§. 57. n. 3.), folglich ist er in dieser Zeit von E bis A gestiegen, d. i. eben so hoch, als er in derselben gefallen war.

Erklärung 24.

§. 61. Wenn man in einer krummen Linie BAB (Fig. 17.) die Linie AC zur Axe annimmt, so nennt man alle ihre Theile z. B. A 1, A 4, AC ꝛc. ihre Abscissen, und wenn man durch die Theilungspunkte 1, 4, C ꝛc. die Linien 1 M, 4 N, CB mit einander parallel zieht; so nennt man sie die jenen Abscissen zugehörigen Ordinaten. Ist die krumme Linie von der Art, daß die Abscissen sich jedesmal wie die Quadrate ihrer Ordinaten verhalten, so heißt die krumme Linie eine Parabel, und der Punkt A heißt ihr Scheitel.

Zus. Nimmt man daher die Ordinaten 1 M, 4 N ꝛc. auf der Axe AC senkrecht; so sind die Ordinaten 1 m, 1 M, imgleichen 4 n, 4 N ꝛc. auf beyden Seiten der Axe einander gleich. Also theilt in diesem Falle die Axe AC die ganze Parabel BAB in zwey congruente Hälften AMB, AmB.

Lehrsatz 38.

§. 62. Wenn ein Körper in der Höhe A nach der horizontalen Richtung AG geworfen wird; so fällt er durch eine Parabel AMNB.

Beweis. Denn wenn der Körper geworfen wird; so setzt er, wenn ihn keine äußere Ursache hindert, seine Bewegung gleichförmig in derselben Richtung fort (§. 26.), folglich durchläuft er in gleichen Zeiten gleiche Linien (§. 6.). Man setze also, die Wurfkraft treibe ihn in 1 Secunde durch AD, in 2 Secunden durch AE = 2AD, in 3 Secunden durch AG = 3AD, u. s. w. Nun setze man ferner die Höhe, durch welche die Körper in einer Secunde fallen = A1; so fällt er in 2 Secunden durch eine 4mal größere A4, in 3 Secunden durch eine 9mal größere AC u. s. w. (§. 49. Z. 10.). Kommt also der Körper nach 1 Secunde von A nach D, so hat ihn mittlerweile die Schwere durch DM = A1 gezogen, und er befindet sich also in M, kommt er durch die Wurfkraft nach 2 Secunden bis E; so hat ihn die Schwere mittlerweile durch EN = A4 gezogen, und er befindet sich daher jetzt in N. Kommt er in 3 Secunden nach N; so hat die Schwere ihn mittlerweile durch GB = AC gezogen, folglich ist er jetzt in B u. s. w. mithin verhalten sich die Abscissen A1, A4, A9, wie die Höhen der Fälle, diese aber verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, mithin wie die Quadrate von AD, AE, AG rc. d. i. wie die Quadrate von 1M, von 4N, von CB rc. Also ist die Linie AMNB eine Parabel (§. 61.).

Lehrsatz 39.

§. 63. Wenn ein Körper B nach einer Richtung BF geworfen wird, die mit dem Horizonte BC einen schiefen Winkel macht; so beschreibt er die ganze Parabel BNAnB.

Beweis. Denn man lasse aus einem beliebigen Punkt F der Richtung BF die Linie FC auf die Horizontallinie BC senkrecht fallen, halbire sie in A, theile BF z. B. in 3 gleiche Theile BL, LO, OF, und BC gleichfals in BI, IK, KC, und setze die Höhe des Falls in 1 Secunde = A 1. Gesetzt nun, die Wurfkraft treibe den Körper B in 1 Secunde bis L; so zieht ihn die Schwere mittlerweile durch LN = A 1, und er ist also nach einer Secunde in N. Treibt jene nach 2 Secunden ihn bis O; so zieht ihn die Schwere durch OM = 4 A 1, und er ist jetzt in M. Treibt jene nach 3 Secunden ihn bis F; so zieht ihn die Schwere binnen dieser Zeit durch FA = 9 A 1 = AC, und er ist also nach 3 Secunden in A. Nun verhält sich die Höhe A 1 zur Höhe A 4, wie das Quadrat von 1 Secunde zum Quadrat von 2 Secunden (§. 49. Z. 1.) mithin wie das Quadrat von M 1 zum Quadrat N 4 (p. constr.), und eben so verhält sich die Höhe A 1 zur Höhe von AC wie das Quadrat von 1 Secunde zum Quadrat von 3 Secunden, mithin wie das Quadrat von M 1 zum Quadrat von BC. Also ist die Linie BNMA, durch welche der Körper binnen 3 Secunden gestiegen, = eine Parabel (§. 61.). Allein indem ihn die Wurfkraft durch BF trieb, ist es eben so viel, als ob er, statt die-

ser, von den beyden Wurfkräften BH, BC, deren jene vertical, und diese horizontal ist, zugleich getrieben, und so mittlerweile durch die Diagonale des rechtwinklichten Parallelogramms BHFC gestiegen wäre (§. 12. Z. 1.). Indem aber der Körper bis F gekommen, ist die verticale Kraft BH erschöpft, und kann ihn also nicht höher treiben, also hat der Körper B seine größeste Höhe in A erreicht. Die Horizontalkraft GA = BC hingegen ist unverändert geblieben, mithin muß er von A durch die Parabel AmnB wieder herunterfallen (§. 62.), und es ist von selbst klar, daß m1 = M1, n4 = N4, BC = BC u. s. w. ist, mithin die Axe AC die ganze Parabel BMAmB in zwey congruente Hälften theilt.

Zus. 1. Die größeste Höhe CA, zu welcher der unter dem schiefen Winkel B nach der Richtung BF geworfene Körper steigt, bekommt man, wenn man das Quadrat seiner Wurfsgeschwindigkeit a durch das Quadrat des Sinus von B multiplicirt, und durch das Product aus der vierfachen Höhe des Falls g in 1 Secunde in das Quadrat des Sinustotus dividirt, d. i. wenn man den Sinustotus = r setzt; so ist $CA = \frac{a^2 . (\sin. B)^2}{4gr^2}$.

Denn da er während der Zeit, da ihn die Wurfkraft bis F trieb, durch FA gefallen ist; so ist seine in A erlangte Geschwindigkeit c so groß, daß er mit derselben gleichförmig durch eine Linie laufen kann, die 2mal so groß ist, als AF (§. 49. Z. 12.) mithin durch CF (p. dem.), folglich verhält sich

$a : c = BF : CF$ (§. 7. Z. 4.). Nun aber ist $r : \sin B = BF : CF$ (Trig. §. 2. Z. 6.), mithin ist $r : \sin. B = a : c$, also $c = \frac{a \cdot \sin. B}{r}$.

Nun aber ist $FA = \frac{c^2}{4g}$ (§. 54. Z.), und $CA = FA$ (p. dem.). Also ist $CA = \frac{a^2 \cdot (\sin. B)^2}{4gr^2}$.

Zus. 2. Die Zeit t, in welcher der Körper die halbe Parabel BMA durchläuft, ist $= \frac{a \cdot \sin. B}{2gr}$. Denn da er binnen der Zeit t durch FA gefallen ist; so ist $t = \sqrt{\frac{FA}{g}}$ (§. 53. Z.) $= \frac{a \cdot \sin \cdot B}{2gr}$ (Z. 1.).

Zus. 3. Da nun der Körper durch die andere Hälfte AmB der Parabel in eben der Zeit wieder herabfällt; so ist die Zeit, in welcher er die ganze Parabel BMAmB durchläuft, $= \frac{a \cdot \sin B}{g \cdot r}$.

Zus. 4. Die Breite BB der ganzen Parabel, die man die Wurf- oder Schußweite nennt, ist $= \frac{a^2 \cdot \sin. 2B}{2gr}$.

Denn da $\sin. B : CF = \cos. B : BC$ ist; so ist $BC = \frac{CF \cdot \cos. B}{\sin. B}$. Da nun $CF = 2CA = \frac{a^2 \cdot (\sin. B)^2}{2gr^2}$ (Z. 1.) so ist

$BC = \frac{a^2 \cdot \sin \cdot B \cdot \cos \cdot B.}{2gr^2}$. Nun aber ist

$\frac{2 \sin. B \,.\, \cos. B}{r} = \sin. 2B$ (Kästners Trigon. S. 19. Z. 5.), also $BB = 2BC = \frac{a^2 \,.\, \sin.\, 2B}{2gr}$.

Z. B. wenn $B = 15^\circ$ ist, so ist $\sin. 2B = \sin. 30^\circ = \frac{1}{2} r$, also die Wurfweite $BB = \frac{a^2}{4g} = \frac{a^2}{62,5}$ Rheinl. Fuß, d. i. gerade so groß, als die Höhe, von welcher der Körper vertical fallen muß, um die Wurfsgeschwindigkeit a zu erlangen (§. 54. Z.)

Zus. 5. Die Wurfweite BB wird desto größer, je mehr sich der Wurfwinkel B dem Winkel von 45° nähert.

Denn um so mehr nähert sich 2 B dem Winkel von 90°, und um so mehr wächst daher sin. 2 B, also auch BB (Z. 4.).

Zus. 6. Also ist die Wurfweite BB die allergrößeste, wenn der Wurfwinkel $B = 45^\circ$ ist, und zwar ist sie hier $= \frac{a^2}{2g} = \frac{a^2}{31,25}$ Rheinl. Fuß, d. i. zweymal so groß, als wenn der Körper unter einem Winkel von 15° geworfen wird.

Denn da hier $\sin. 2B = r$, r aber der größeste Sinus ist; so wird hier BB am größesten, und zwar $= \frac{a^2}{2g}$ d. i. 2 mal so groß, als für den Wurfwinkel von 15° (Z. 4.) z. B. wenn die Wurfgeschwindigkeit a für jede Secunde $= 1555\frac{2}{3}$ Fuß ist; so ist die Wurfweite unter einem Winkel B von $45^\circ = 77426$ Fuß, d. i. über 3 Meilen.

Zus. 7. Zwey Winkel B, C, die zusammen 90° machen, z. B. 44° und 46°, 29° und 61°, geben einerley Wurfweite.

Denn wenn $B + C = 90°$ ist; so ist $B = 90° - C$, folglich $2B = 180° - 2C$. Nun aber ist sin. $(180° - 2C)$ = sin. $2C$ (Trigonom. §. 2. Z. 11.) folglich sin. $2B$ = sin. $2C$. Also ist für beyde Winkel die Wurfweite BB dieselbe (Z. 4.).

Zus. 8. Die Höhe CA, zu welcher der Körper steigt, imgleichen die Zeit seines Laufs durch die Parabel wird desto größer, je größer der spitze Winkel B ist, unter welchem er geworfen wird (Z. 1. 2.) Wollte man daher von 2 Winkeln, die zusammen 90° machen, den größern, der über 45° ist, wählen, so würde man unnützer Weise den Körper bloß höher treiben, und ihn länger auf seinem Wege verweilen. Denn die Wurfweite ist dieselbe, als bey dem kleinern von beyden Winkeln (Z. 7.), und die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper auf die Erde zurück fällt, gleichfals, nämlich der Wurfsgeschwindigkeit gleich (§. 59.). Daher nennt man in der Artillerie die Schüsse, die unter einem Winkel geschehen, der über 45° ist, Würfe.

Zus. 9. Wenn ein Körper unter demselben Winkel B mit verschiedenen Geschwindigkeiten geworfen wird; so verhalten sich die Wurfweiten, wie die Quadrate der Wurfgeschwindigkeiten, mithin die Wurfsgeschwindigkeiten selbst, wie die Quadratwurzeln der Wurfweiten z. B. Soll der Körper das einemal 9mal weiter gehen, als das andere; so muß

die Wurfgeschwindigkeit das erstemal 3 mal größer seyn, als das andere.

Denn so vielmal a^2 das einemal größer ist, als das andere, so vielmal ist auch BB das erste mal größer, als das andere (Z. 4.).

Zus. 10. Will man den Winkel B wissen, unter welchem der Körper mit der Geschwindigkeit von a Fuß geworfen werden muß, wenn er von B nach dem andern Ort B kommen soll; so bekommt man denselben durch folgende Gleichung

$$\sin.2B = \frac{2gr.BB}{a^2} = \frac{31,25.r.BB}{a^2} \text{ (Z. 4.)}$$

Zus. 11. Wenn man daher für den Wurf eines Körpers zwey verschiedene Winkel B, E annimmt; so verhalten sich die Sinusse der doppelten Winkel, wie die Quotienten aus den Wurfweiten in die Quadrate der Wurfgeschwindigkeiten, d. i. wenn die Wurfweite für den zweyten Winkel E = BL, und die Wurfgeschwindigkeit = c ist; so ist

$$\frac{BB}{a^2} : \frac{BL}{c^2} = \sin.2B : \sin.2E \text{ (Z. 10.).}$$

Zus. 12. Weiß man daher für irgend einen Wurf, in welchem die Wurfgeschwindigkeit a und Wurfweite BB bekannt ist, den Winkel B, unter welchem er geworfen wird; so kann man durch die Proportion Z. 11. für jeden andern Wurf, in welchem die Wurfgeschwindigkeit c und Wurfweite BL gegeben wird, den Wurfwinkel E sehr bequem finden.

Anmerkung.

Bey dieser ganzen Theorie vom Fall und Wurf der Körper ist vorausgesetzt, daß ihre Bewegung durch keine äußere Ursache verändert wird, und sie sich also im Luftleeren Raum bewegen. Allein geschieht die Bewegung in der Luft; so widersteht diese, und dieser Widerstand wird desto stärker, je geschwinder die Bewegung ist, folglich wird die Geschwindigkeit des Körpers hiedurch beständig vermindert. Bey langsam geworfenen Körpern beträgt dieses, zufolge der Erfahrung, nur wenig, daher läßt sich die vorgetragene Theorie auf diese noch ohne einen großen Fehler geradezu anwenden. Allein bey schnell geworfenen Körpern, wie z. B. bey Kanonen- und Bombenschüssen, wird der Widerstand der Luft, und daher auch die Verminderung der Geschwindigkeit ungemein stark, z. B. bey einer 4pfündigen eisernen Kugel, die in einer Secunde durch $1555\frac{2}{3}$ Fuß geworfen wird, beträgt der Widerstand der Luft schon so viel, als der Druck eines Gewichts von 164 Pfund, und bey einer 24pfündigen, die in einer Secunde durch 1600 Fuß geworfen wird, beträgt er so viel als der Druck eines Gewichts von 612 Pfund. Also ist klar, daß die vorgetragene Theorie hier geradezu gar nicht anwendbar ist, und die Kanonenkugeln und Bomben nicht, wie Blondel und Belidor meynten, eine wirkliche Parabel beschreiben können, sondern durch eine ganz andere krumme Linie gehen müssen. So sollte, wofern die Bahn der Bomben wirklich eine Parabel wäre, bey einer 4pfündigen Kugel, die unter einem Winkel von 45° mit einer Geschwindigkeit von $1555\frac{2}{3}$ Fuß aus der Kanone fährt, die Schußweite BB (Fig. 17.) 77426 Fuß, d. i. über 3 Meilen betragen, nach der Erfahrung aber beträgt sie kaum 9120 Fuß, also über 8mal weniger. Will man also den wahren Weg für die Bogenschüsse finden; so muß man erst die Größe des Widerstandes der Luft für jeden Fall bestimmen, und hiezu hat Euler in seiner Artillerie eine allgemeine Regel angegeben. Alsdann aber muß man auch noch die Natur der krummen Linie ausmitteln, welche die Kugel bey diesem Widerstande der Luft beschreibt. Auch diese hat Euler zu bestimmen gesucht, aber die Gleichung für dieselbe ist so verwickelt,

daß es, nach seinem eigenen Geständniß, unsägliche Mühe erfordern würde, die wirkliche Berechnung der Bahn nach ihr anzustellen.

Fünfter Abschnitt.

Vom Fall der Körper auf einer schiefen Ebene.

Erklärung 25.

§. 64. Eine schiefe Ebene (planum inclinatum) heißt eine solche AC (Fig. 18.), die mit der Horizontal Ebene BC einen schiefen Winkel macht. Die schiefe Linie AC heißt ihre Länge, die verticale AB ihre Höhe, und die horizontale BC ihre Grundlinie.

Lehrsatz 40.

§. 65. Ein Körper L (Fig. 18.) fällt binnen der Zeit, da er frey durch die verticale Höhe AK gefallen wäre, auf der schiefen Ebene AC bis zu dem Punkte M, in welchem die Perpendicularlinie KM die schiefe Ebene AC schneidet, und der Weg durch AM verhält sich zur Höhe AK, wie die Höhe der schiefen Ebene AB zu ihrer Länge AC.

Beweis. Denn man setze, der Schwerpunkt des Körpers L liege in G, so sucht die Schwere denselben nach der Verticallinie GI herunter zu ziehen, welches aber die schiefe Ebene AC nicht zuläßt.

Nun

Nun setze man der Körper L liege auf dieser in A so, daß GA auf AC senkrecht ist; so ist AG mit KM parallel, und da auch GI mit AK parallel ist; so ist GI = AK, folglich sucht die Schwere den Schwerpunkt G bis I zu ziehen. Man verlängere also IM, bis ME = AG wird, und beschreibe mit GE, EI das rechtwinklichte Parallelogramm GEIO; so ist es eben so viel, als ob der Schwerpunkt G binnen der Zeit durch GO, GE zugleich bewegt würde. Nun aber wird die Kraft, die ihn nach GO zu bewegen strebt, durch den Widerstand der schiefen Ebene gänzlich aufgehoben, und durch sie der Körper an letztere bloß angedrückt, die Kraft hingegen, die ihn durch GE zu bewegen strebt, wirkt ganz ungehindert, also geht der Schwerpunkt G bis E, mithin der Körper L auf der schiefen Ebene durch AM = GE; und da die Dreyecke MAK, BAC ähnlich sind; so ist AM : AK = AB : AC.

Zus. 1. Da AM kleiner als AK ist; so fällt der Körper auf der schiefen Ebene langsamer, als wenn er vertical herunter fällt.

Zus. 2. Wenn man die Höhe AK weiß, durch welche ein Körper in einer gegebenen Zeit vertical fällt; so findet man die Linie AM, durch welche er in eben der Zeit auf der schiefen Ebene AC fällt, wenn man die gegebene verticale Höhe durch die Höhe der schiefen Ebene multiplicirt, und durch ihre Länge dividirt, d. i. $AM = \frac{AK \cdot AB}{AC}$.

Z. B. Da die Körper in 4 Secunden ungefähr durch 240 Fuß vertical fallen; so fallen sie auf einer schiefen Ebene, deren Länge 12mal größer als ihre Höhe ist, in 4 Secunden durch 20 Fuß.

Zus. 3. Weiß man umgekehrt die Linie AM, die der Körper L in einer gegebenen Zeit auf der schiefen Ebene gefallen ist; so findet man die Höhe AK, durch welche er binnen dieser Zeit vertical fällt, wenn man diese Linie durch die Länge der schiefen Ebene multiplicirt, und durch ihre Höhe dividirt, d. i. $AK = \frac{AM \cdot AC}{AB}$.

Zus. 4. Die Linie AN, die der Körper L auf der schiefen Ebene binnen der Zeit fällt, in welcher er durch ihre Höhe AB fallen würde, bekommt man, wenn man das Quadrat der Höhe durch die Länge der schiefen Ebene dividirt, d. i. $AN = \frac{AB^2}{AC}$. Denn hier wird $AK = AB$.

Zus. 5. Die Höhe, durch welche ein binnen einer gegebenen Zeit auf einer schiefen Ebene durch ihre ganze Länge AC gefallener Körper in eben der Zeit vertical fällt, bekommt man, wenn man das Quadrat der Länge der schiefen Ebene durch ihre Höhe dividirt, d. i. die verticale Höhe ist in diesem Fall $= \frac{AC^2}{AB}$ (Z. 3.) Denn hier wird $AM = AC$.

Zus. 6. Die Kraft, die den Körper L auf der schiefen Ebene AC herunterstößt, verhält sich zum Gewicht des Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Denn wenn die Schwere

binnen der Zeit, da der Körper auf der schiefen Ebene durch AM lief, seinen Schwerpunkt G vertical durch GI = AK herunter zu ziehen strebte; so war es bloß die mit der schiefen Ebene AC parallel wirkende Kraft, die ihn durch GE = AM auf letzterer hinunterzog (p. dem.), folglich verhält sich die Kraft, die den Körper auf der schiefen Ebene herunterstößt, zur Schwere des Körpers, die ihn vertical herunter zieht, wie AM : AK, mithin wie AB : AC. Nun aber ist die Schwere, die die gesammte Materie des Körpers vertical herunter zieht, seinem Gewicht gleich (§. 50.) Also verhält sich die Kraft, die den Körper L auf einer schiefen Ebene AC herunterzieht, zu seinem Gewicht, wie AB : AC.

Zus. 7. Wenn daher eine Kraft, die den Körper nach entgegen gesetzter Richtung CA auf der schiefen Ebene hinauf zu ziehen strebt, seinen Fall auf dieser verhindern, d. i. ihn in Ruhe erhalten soll; so muß sie der Kraft, die ihn nach AC herunterstößt, gleich seyn (§. 11. Z.), mithin sich zum Gewicht des Körpers verhalten, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge (Z. 6.).

Zus. 8. Der Druck, den die schiefe Ebene AC vom Körper L leidet, verhält sich zum Gewicht des Körpers L, wie die Grundlinie BC der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Denn wenn die Schwere den Schwerpunkt G des Körpers durch GI = AK zu ziehen strebt; so strebt der Körper die schiefe Ebene durch GO zu drücken (p. dem.), folglich verhält sich der Druck, den die Ebene AC vom Körper L leidet,

zur Schwere des ganzen Körpers, d. i. zu seinem Gewicht, wie GO : GI, mithin wie EI : AK, folglich wie MK : AK, also wie BC : AC.

Zus. 9. Die Wege AM, AN, die ein Körper L auf der schiefen Ebene AC durchläuft, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, in welchen dieses geschieht. Denn wenn KM, BN auf AC senkrecht sind; so verhält sich die Zeit t, in welcher er durch AM läuft, zur Zeit T, in welcher er durch AN läuft, wie die Zeit, in welcher er vertical durch AK fällt, zur Zeit, in welcher er vertical durch AB fällt (Lehrs. 40.). Nun aber verhält sich die Zeit für AK zur Zeit für AB, wie $\sqrt{AK} : \sqrt{AB}$ (§. 49. 10.), folglich ist $t : T = \sqrt{AK} : \sqrt{AB}$, mithin $AK : AB = t^2 : T^2$. Da nun KM, BN parallel sind; so ist AK : AB = AM : AN, also $AM : AN = t^2 : T^2$.

Zus. 10. Da also die Körper auf der schiefen Ebene nach eben dem Gesetz fallen, nach welchem ihr verticaler Fall geschieht, dieser aber gleichförmig beschleunigt ist (§. 49. Z. 8.); so ist auch der Fall der Körper auf der schiefen Ebene eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Zus. 11. Also verhalten sich auch die Geschwindigkeiten, die der Körper auf der schiefen Ebene am Ende zweyer Zeiten hat, wie die Zeiten, in welchen er sie erlangt hat (§. 35. Z. 2.).

Zus. 12. Also verhalten sich auch die Wege AM, AN, die der Körper L auf der schiefen Ebene durchläuft, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, die er in M und N hat (Zus. 9. 11.).

Zus. 13. Wenn zwey schiefe Ebenen AC, AF (Fig. 19.) einerley Höhe AB haben, und aus der Spitze des rechten Winkels B auf dieselben die Perpendicularlinien BM, BN gezogen werden; so durchläuft der Körper auf AC die Linie AM in eben der Zeit, als auf AF die Linie AN.

Denn er läuft sowohl durch AM, als durch AN in eben der Zeit, in welcher er vertical durch AB fällt (Lehrs. 46.).

Zus. 14. Wenn daher (Fig. 20.) der Durchmesser AB eines Kreises ADBA vertical ist; so fällt der Körper durch alle Sehnen AE, AC, AD, AG xc. in einerley Zeit, nämlich in eben der Zeit, in welcher er vertical durch den Durchmesser AB fallen würde (Z. 13.).

Denn hier sind alle Linien BE, BC, BD xc. auf den Sehnen AE, AC, AD xc. als verschiedenen schiefen Ebenen von einerley Höhe AB senkrecht.

Zus. 15. Eben so fällt der Körper auch durch alle untere Sehnen EB, CB, DB xc. in einerley Zeit.

Denn man ziehe z. B. die obere Sehne AG mit der untern CB parallel; so machen beyde mit der Horizontallinie HF gleiche Winkel, also ist der Fall auf der einen als einer schiefen Ebene ebenderselbe als auf der andern. Nun aber fällt der Körper durch AG in eben der Zeit, als durch AB (Z. 14.), also fällt er, da EB = AG ist, durch CB gleichfals in eben der Zeit, als durch AB.

Zus. 16. Wenn (Fig. 19.) ein Körper auf einer schiefen Ebene von A bis E gefallen ist; so

hat er seine Höhe um die verticale Linie AI vermindert, mithin ist sein verticaler Fall = AI. Also bekommt man seine Geschwindigkeit, die er durch den Fall auf der schiefen Ebene AE in E erlangt hat, wenn man aus dem Product der 4fachen Höhe g, durch welche die Körper in 1 Secunde fallen, in die Linie AI die Quadratwurzel auszieht, d. i. die Geschwindigkeit in E ist $= \sqrt{4g \cdot AI}$, mithin in Rheinl. Fußen $= \sqrt{(62,5 \cdot AI)} = 7,9 \cdot \sqrt{AI}$ (§. 54.).

Zus. 17. Also verhalten sich die Geschwindigkeiten, die der Körper durch den Fall auf den Sehnen AE, AC erlangt hat, wie die Quadratwurzeln der Höhen AI, AK. Denn sie verhalten sich, wie $7,9 \cdot \sqrt{AI} : 7,9 \cdot \sqrt{AK}$ (Z. 16.), also wie $\sqrt{AI} : \sqrt{AK}$.

Zus. 18. Wenn ein Körper durch eine krumme Linie AMN (Fig. 21.) fällt; so ist die verticale Höhe, durch die er gefallen ist, die Linie AK, also ist die Geschwindigkeit, die er in N durch den Fall erlangt hat, $= \sqrt{4g \cdot AK} = 7,9 \cdot \sqrt{AK}$.

Anmerkung 1.

Die Zeiten aber, in welchen ein Körper für dieselbe Höhe AK durch zwey krumme Linien fällt, sind nicht gleich, sondern diese sind nach der Figur des Weges verschieden. Hier könnte man denken, der Körper würde auf der geraden Linie AN, als dem kürzesten Wege von A nach N, am früheſten in N anlangen, aber dieses ist unrichtig. Vielmehr kommt er in einem Bogen AMN früher an, und am allerfrüheſten, wenn AMN ein Bogen einer Cycloide oder Radlinie ist, die ein Punkt der Peripherie eines Rades beschreibt, das auf einer Ebene fortrollt. Diese Radlinie hat zugleich die Eigen-

schaft, daß der Körper in derselben Zeit in N anlangt, er mag vom obersten Punkt A an, oder von irgend einem niedrigern M auf ihr herablaufen. Uebrigens ist merkwürdig, daß, wenn auch (Fig. 20.) die Sehne DB unendlich klein angenommen wird, dennoch die Zeit, in welcher der Körper auf ihr herabfällt, von endlicher Größe ist, nämlich eben so groß als diejenige, in welcher er vertical durch den Durchmesser AB fällt (Z. 14. 15.).

Anmerkung 2.

In der Theorie vom Fall der Körper auf einer schiefen Ebene wird gleichfals vorausgesetzt, daß derselbe frey geschieht, und daher weder durch den Widerstand der Luft noch durch die Reibung des Körpers auf der Ebene gehindert wird. Da der Fall auf der schiefen Ebene langsamer ist, als wenn der Körper von einer Höhe vertical fällt; so ist bey jenem der Widerstand der Luft weniger beträchtlich, als bey diesem. Sucht man also zugleich so viel möglich auch die Reibung zu verhüten; so läßt sich die Geschwindigkeit des Falls von einer verticalen Höhe, nach Z. 3., weit genauer ausmitteln, wenn man den Körper auf einer schiefen Ebene herunter laufen, als wenn man ihn vertical fallen läßt. Auf diese Art untersuchte Galiläus den Fall der Körper, indem er eine sehr polirte metallene Kugel auf einer mit Pergament überzogenen schiefen Ebene herabrollen ließ. Am genauesten aber läßt sich die Geschwindigkeit des Falls, wie wir bald sehen werden, durch die Schwingungen eines Pendels ausmitteln.

Sechster Abschnitt.

Von den Schwingungen der Pendeln.

Erklärung 26.

§. 66. Eine um einen festen Punkt C (Fig. 22.) bewegliche steife gerade Linie CA z. B. ein Faden, oder eine Stange, die unten in A mit einem Gewicht beschwert ist, heißt ein Pendel (pendulum). Kommt das Gewicht der Linie CA selbst in keine Betrachtung; so heißt es ein einfaches Pendel, im entgegengesetzten Fall aber ein zusammengesetztes.

Zus. 1. Wenn ein Pendel CA vertical herunter hängt; so ist das Gewicht A in seinem Schwerdurchmesser vom festen Punkt C unterstützt, und hängt also in Ruhe (§. 49. Z. 2.).

Zus. 2. Wenn man hingegen das Pendel in eine schiefe Lage CB bringt; so fällt es, bis es in A in die verticale Lage CA kommt, durch den Bogen BA, steigt aber in derselben Zeit durch den gleichen Bogen hinauf, und geht alsdann wieder durch den Bogen DAB zurück u. s. w.

Denn zieht man die Horizontallinie BD und die Sehne BA; so liegt das Gewicht A in B auf der schiefen Ebene BA, und muß daher, wenn es durch nichts gehindert wird, auf ihr bis A herabfallen

(§. 65.). Allein dieses kann nicht geschehen, weil sonst das als steif vorausgesetzte Pendel kürzer werden müßte, also muß es durch den Kreisbogen BA fallen; so daß sein verticaler Fall = FA ist, mithin ist seine durch den Fall erlangte Geschwindigkeit in A so groß, daß es mit derselben binnen eben der Zeit wieder vertical bis F steigen kann (§. 60.), also muß es in eben der Zeit durch den gleichen Kreisbogen AD hinaufsteigen, mithin von hier wieder durch DAB zurückgehen u. s. w.

Zus. 3. Wenn daher keine Reibung am festen Punkte C, kein Widerstand der Luft, noch irgend eine andere Hinderniß, z. B. die Verlängerung oder Abkürzung des Pendels durch Wärme und Kälte vorhanden wäre; so würde das Pendel sich unaufhörlich hin und zurückbewegen, und also ein wirkliches perpetuum mobile seyn.

Erklärung 27.

§. 67. Das Hin- und Zurückgehen des Pendels, oder sein Fallen und Steigen nennt man seine Schwingung, Oscillation oder Vibration. Die Bewegung durch den ganzen Bogen BAD, oder DAB heißt ein Pendelschlag.

Zus. Also ist jeder von den Bogen BA, AD ein halber Pendelschlag (§. 66. Z. 2.).

Lehrsatz 41.

§. 68. Bey jedem einfachen Pendel bekommt man die Zeit eines Pendelschlages durch einen unendlich kleinen Bogen GAD (Fig. 23.), wenn man

die halbe Pendellänge durch die Höhe des Falls in einer Secunde dividirt, und die Quadratwurzel des Quotienten durch die Zahl π, welche das Verhältniß der Peripherie des Kreises zum Durchmesser anzeigt, multiplicirt, d. i. wenn man die halbe Pendellänge $\frac{1}{2}$ CA $= a$, die Höhe des verticalen Falls in 1 Secunde $= g$, und die Zeit eines ganzen Pendelschlages $= T$ setzt; so ist $T = \pi . \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Beweis. Denn man setze die Pendellänge oder den Halbmesser $CA = r$. Nun sey das Pendel durch den Bogen NL gefallen; so ist es vertical durch MK gefallen, folglich ist in L seine Geschwindigkeit $c = \sqrt{4g} . \sqrt{MK}$ (§. 54.). Setzt man also der Kürze wegen $\sqrt{4g} = k$; so ist in L seine Geschwindigkeit $c = k . \sqrt{MK}$. Nun setze man $KE = \frac{1}{\infty} AB = \frac{1}{\infty} . 2r$; so ist der Bogen $LH = \frac{1}{\infty} BNA = \frac{1}{\infty} \pi r$. Man nehme also an, das Pendel setze in L seine Bewegung durch den unendlich kleinen Bogen LH fort; so ist seine Bewegung durch LH gleichförmig, folglich bekommt man ihre Zeit t, wenn man den Raum durch die Geschwindigkeit dividirt (§. 8. Z. 2.), mithin ist $t = \frac{LH}{k . \sqrt{MK}}$, und da $MK = ME$ ist; so ist $t = \frac{LH}{k . \sqrt{ME}}$, also $t = \frac{\frac{1}{\infty} \pi r.}{k . \sqrt{ME}}$. Nun hebe

man den Fall durch NL auf; so wird MK = o, folglich ME = KE = $\frac{1}{\infty}$. 2r, mithin

$$t = \frac{\frac{1}{\infty} \cdot \pi r}{k \cdot \sqrt{\frac{1}{\infty}} \cdot \sqrt{2r}}$$

Nun ist $\frac{1}{\infty} = 1 . o$, folglich $\sqrt{\frac{1}{\infty}} = \sqrt{1 . o} = 1 . o$, mithin $\frac{1}{\infty} : \sqrt{\frac{1}{\infty}} = \frac{1 . o}{1 . o} = 1$, also $t = \frac{\pi r}{k . \sqrt{2r}}$. Da nun k = $\sqrt{4g}$ (p. hyp.) = $2\sqrt{g}$, und $\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}$ CA = a (p. hyp.), folglich r = 2a, und $\sqrt{2r} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$; so ist $t = \frac{2\pi a}{2\sqrt{g} . 2\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2} . \sqrt{\frac{a}{g}}$. Man mache also FA = KE; so ist für den Fall des Pendels durch GA die Zeit $t = \frac{\pi}{2} . \sqrt{\frac{a}{g}}$. Nun aber steigt es durch den Bogen AD in gleicher Zeit (§. 66. Z. 2.), folglich ist T = 2t, also ist für den ganzen Pendelschlag durch den unendlich kleinen Bogen GAD die Zeit $T = \pi . \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Zus. 1. Die Zeit eines Pendelschlages durch einen unendlich kleinen Kreisbogen verhält sich zur Zeit des verticalen Falls durch die halbe Pendellänge, wie die Peripherie des Kreises zum Durchmesser, d. i. wie $\pi : 1$.

Denn da $T = \pi . \sqrt{\frac{a}{g}}$; so ist $T : \sqrt{\frac{a}{g}} = \pi : 1$,

aber $\sqrt{\frac{a}{g}}$ ist die Zeit, in welcher ein Körper vertical durch die Höhe a, d. i. durch die halbe Pendellänge fällt (§. 53. Z.).

Zus. 2. Die halbe Pendellänge a ist $= \frac{gT^2}{\pi^2}$.

Denn da $T = \pi . \sqrt{\frac{a}{g}}$; so ist $T^2 = \frac{\pi^2 a}{g}$, folglich $a = \frac{gT^2}{\pi^2}$. Weiß man daher die Zeit eines Pendelschlages und die Höhe des Falls in einer Secunde; so kann man die Länge des Pendels finden.

Zus. 3. Für ein Secundenpendel, d. i. ein solches, dessen Schlag gerade eine Secunde währt, ist daher die halbe Länge $a = \frac{g}{\pi^2}$, mithin die ganze Länge $CA = \frac{2g}{\pi^2}$. Denn hier wird $T = 1$. Z. B. beträgt g, d. i. die Höhe des Falls in 1 Secunde 15,625 Rheinl. Fuß; so ist die Länge des Secundenpendels $CA = \frac{31,25}{3,14159265...^2} = \frac{31,25}{9,86965...}$ $= 3,16625...$ Rheinl. Fuß.

Wollte man also nach Hugens Vorschlage den dritten Theil der Länge eines Secundenpendels zum allgemeinen Fuß annehmen; so betrüge dieser 1,0554 Rheinl. Fuß. Indessen würde dieser allgemeine Fuß doch nur in denjenigen Ländern die bestimmte Länge haben, in denen der verticale Fall in 1 Secunde genau 15,625 Rh. Fuß beträgt.

Zus. 4. Für den verticalen Fall der Körper in einer Secunde ist die Höhe $g = \frac{\pi^2 a}{T^2}$. Denn da $a = \frac{g T^2}{\pi^2}$ (Z. 2.), so ist $g = \frac{\pi^2 a}{T^2}$.

Weiß man daher die Zeit eines Pendelschlages und die Länge des Pendels; so kann man hieraus die Höhe des verticalen Falls in einer Secunde finden, und zwar genauer, als durch irgend eine andere Methode. Denn da die Bewegung eines langen Pendels sehr langsam ist; so kommt hier der Widerstand der Luft fast gar nicht in Betrachtung, und es ist also fast eben so viel, als ob es im luftleeren Raum fiele.

Zus. 5. Also bekommt man vermittelst eines Secundenpendels die Höhe des verticalen Falls in einer Secunde, wenn man seine halbe Länge durch π^2 multiplicirt.

Denn da hier $T = 1$ ist; so ist $g = \pi^2 a = 9,86965\ldots a$. Z. B. beträgt die Länge des Secundenpendels 3,16625... Rheinl. Fuß, folglich die halbe Länge 1,58312...; so ist

$g = 9,86965 \ldots \times 1,58312 \ldots = 15,625$ Rhl. Fuß.

Zus. 6. Wenn daher die Länge des Secundenpendels an einem Orte kürzer ist, als am andern; so ist die Höhe des verticalen Falls in einer Secunde am erstern Ort kleiner, als am letztern, also die Wirkung der Schwere an jenem geringer als an diesem. Denn je kleiner a ist, desto kleiner ist g (Z. 5.).

Zus. 7. Bey gleichen Wirkungen der Schwere verhalten sich die Pendellängen, wie die Quadrate der Zeiten eines Pendelschlages. Z. B. soll ein Pendelschlag 2 Secunden währen; so muß das Pendel 4mal länger seyn, als ein Secundenpendel, mithin 12,665 Rheinl. Fuß lang seyn.

Denn da $a = \frac{gT^2}{\pi^2}$ (Z. 2.); so wird, wenn g beständig gleich groß bleibt, a so vielmal größer, um so vielmal größer T^2 wird.

Zus. 8. Also verhalten sich gegentheils bey gleicher Wirkung der Schwere, die Zeiten eines Pendelschlages, wie die Quadratwurzeln der Pendellängen, z. B. ein 4mal längeres Pendel verrichtet seinen Schlag 2mal langsamer (Z. 7.).

Zus. 9. Die Zeit des Falls durch einen unendlich kleinen Bogen verhält sich zur Zeit des Falls durch seine Sehne, wie $\pi : 4$, oder wie $0,78539816\ldots : 1$, d. i. wie die Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers, oder wie die Peripherie zum Perimeter des um den Kreis beschriebenen Quadrats.

Denn die Zeit des Falls durch den Bogen GA ist $= \frac{\pi}{2} . \sqrt{\frac{a}{g}}$, die Zeit des Falls durch die Sehne aber $= \sqrt{\frac{4a}{g}}$ (§. 65. Z. 14. und §. 53. Z.) folglich verhält sich die Zeit für den Bogen zur Zeit für die Sehne, wie $\frac{\pi}{2} . \sqrt{\frac{a}{g}} : \sqrt{\frac{4a}{g}}$, folglich wie $\frac{\pi}{2} : 2$, also, wie $\pi : 4$.

Also fällt ein Körper durch den Bogen weit geschwinder, als durch seine Sehne.

Zus. 10. Die verticale Höhe, durch welche ein Körper binnen der Zeit eines halben Pendelschlages fällt, ist $= 1,2337\ldots r$, d. i. beynahe $\frac{5}{4}$ der Pendellänge, und verhält sich daher zum 8ten Theil der Pendellänge, wie das Quadrat der Peripherie des Kreises zum Quadrate des Durchmessers, d. i. wie $9,86965\ldots : 1$.

Denn da die Zeit, in welcher das Pendel durch den Bogen GA fällt $= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$ ist; so ist die Höhe, durch welche ein Körper in derselben Zeit vertical fällt $= g \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a}{g}$ (Z. 4.) $= \frac{\pi^2}{4} \cdot a = \frac{\pi^2}{8} \cdot r = \frac{9,86965\ldots}{8} \cdot r = 1,23370\ldots r$ d. i. beynahe $\frac{5}{4} \cdot r$, und sie verhält sich also zu $\frac{1}{8}$ r, wie $\pi^2 : 1$.

Zus. 11. Man setze, (Fig. 24.) an einem Pendel CA hinge, außer dem Gewicht A, noch ein anderes K; so stellt dasselbe ein zwiefaches, mithin zusammengesetztes Pendel vor. Das kürzere CK will seinen Schlag in kürzerer Zeit verrichten, als das längere CA (Z. 8.), und beschleunigt daher den Fall des letztern, wird aber dagegen von diesem wieder aufgehalten. Soll also die Schwingung möglich seyn; so muß es zwischen K und A einen Punkt P geben, der seine natürliche Schwungbewegung behält. Diesen Punkt nennt man den Mittelpunkt der Schwingung (centrum oscillationis).

Zus. 12. Wenn daher das zusammengesetzte Pendel CA außer dem Gewicht A, schon an sich von beträchtlichem Gewicht ist; so ist es als ein einfaches Pendel anzusehen, in dessen Schwerpunkt ein Gewicht K befindlich ist, das dem Gewicht der Pendelstange gleich ist, und der Mittelpunkt der Schwingung P liegt also im gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Gewichte K und A.

Anmerkung.

Den Mittelpunkt der Schwingung allgemein zu finden, lehrt die höhere Mechanik. An einer schweren überall gleich dicken Stange von einerley Materie ist derselbe um $\frac{2}{3}$ der Pendellänge CA vom Aufhängepunkt C entfernt, d. i. $CP = \frac{2}{3} CA$. Schlägt man mit der Stange auf einen Körper dergestalt, daß gerade dieser Punkt auf ihn trift; so übt man die größeste Gewalt auf den Körper aus. Trift aber ein anderer Punkt der Stange den Körper; so fühlt man in der Hand eine unangenehme Prellung. Bey einem zusammengesetzten Pendel, dessen Gewicht in merkliche Betrachtung kommt, muß man also die Linie CP für die Länge des Pendels annehmen. Uebrigens ist zu merken, daß, obgleich die angegebene Zeit eines Pendelschlages in vollkommener Schärfe nur für einen unendlich kleinen Bogen GAD (Fig. 23.) richtig ist, sie doch beynahe dieselbe bleibt, wenn auch der Bogen von endlicher Größe, aber sehr klein und nicht über 15′ ist.

Sie=

Siebenter Abschnitt.

Von der Wahrnehmung der Bewegung.

Lehrsatz 42.

§. 69. Wenn wir einen Körper in geradlinigter Bewegung wahrnehmen; so ist es an sich, d. i. ohne anderweitige Gründe unbestimmt, ob er sich in der That bewege, oder ob er nicht ruhe, und hingegen der relative Raum, auf welchen wir seine Bewegung beziehen, ihm nach entgegengesetzter Richtung sich nähere, oder ob sich nicht sowohl der Körper als der relative Raum zugleich gegen einander bewegen. Ja, wenn auch der Körper sich in der That bewegt; so ist es an sich noch unbestimmt, ob seine Bewegung wirklich geradlinigt, und nicht vielmehr eine krummlinigte sey. Wir können also mit Sicherheit objectiv nichts weiter schließen, als daß die geradlinigte Bewegung des Körpers möglich sey.

Beweis. Denn die Wahrnehmung ist in diesem Fall immer dieselbe, man mag den Körper als bewegt, und den relativen Raum als ruhend, oder man mag den Körper als ruhend, und dagegen den relativen Raum mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung bewegt annehmen (§. 9. Z. 3.). Z. B. wenn wir uns in der Cajüte eines schnell nach Osten segelnden Schiffes befinden, ohne

aber seine Bewegung zu bemerken, und wir sehen nach Westen hin ein Schiff, das vor Anker liegt; so kommt es uns vor, daß dasselbe sich nach Westen bewege. Wollten wir bloß hieraus schließen, es bewege sich wirklich so; so würde unser Urtheil sehr voreilig, mithin eine Illusion oder Täuschung seyn. Eben so ist es auch für unsere Wahrnehmung an sich einerley, ob sich bloß der Körper, oder bloß der relative Raum in entgegengesetzter Richtung, oder beyde zugleich gegen einander bewegen (§. 11.), z. B. wenn es uns in der Weite vorkommt, daß zwey Menschen einander immer näher kommen; so bleibt es an sich unbestimmt, ob bloß einer von ihnen, oder ob sie sich beyde zugleich bewegen. Gesetzt endlich, ein entfernter Körper bewegt sich wirklich in einer krummen Linie, die verlängerte Fläche derselben aber geht durch unser Auge; so erscheint uns seine Bewegung doch geradlinigt.

Lehrsatz 43.

§. 70. Wenn nach unserer Wahrnehmung ein Körper sich durch eine krumme Linie bewegt, die ganz außerhalb uns liegt; so ist seine krummlinigte Bewegung wirklich. Z. B. wenn wir einen entfernten Reiter in einem Kreise herum reiten sehen; so ist diese Kreisbewegung wirklich.

Beweis. Denn wenn wir unsere Lage gegen ihn nicht ändern; so erscheint er einmal uns gerade gegenüber, nachher zu unserer Linken, und zwar immer weiter, dann wieder rückwärts immer näher zur Linken, bis wir ihn wieder uns gerade gegen über

erblicken, nunmehr aber erscheint er uns zur Rechten, erst immer weiter, dann aber wieder näher zur Rechten, bis wir ihn endlich wieder an seiner ersten Stelle sehen. Also sind wir uns bewust, daß die Wahrnehmung seiner Bewegung nicht von unserer veränderten Lage gegen ihn herrühre, so daß er in Ruhe bleiben könnte, wir aber etwa nach eben der Richtung uns unbemerkt um ihn bewegt hätten. Aber eben daher kann sie auch nicht davon herrühren, weil etwa der relative Raum außer uns, der den Körper umgiebt, sich nach derselben Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit um ihn bewegte. Denn gesetzt auch, letzteres geschähe wirklich; so würden wir zwar die Körper in diesem relativen Raum uns bald gegen über, bald zu unserer Linken, bald zu unserer Rechten erblicken, und daher ihre krummlinigte Bewegung wahrnehmen, aber wenn der angenommene Körper dabey in Ruhe bliebe; so würde dieser selbst hiebey auf keine Weise zugleich mit, bald uns gegenüber, bald zu unserer Linken rc. erscheinen, sondern er würde von uns als ruhend wirklich wahrgenommen werden. Also geht die Veränderung des relativen Raums die Wahrnehmung der krummlinigten Bewegung des Körpers so wenig an, daß, wenn auch der ganze den Körper umgebende Raum leer, oder durch lauter solche Materien, die für uns nicht wahrnehmbar, oder wenigstens nicht unterscheidbar sind, bezeichnet wäre, wir die krummlinigte Bewegung des Körpers doch auf dieselbe Art wahrnehmen würden. Da also bey der Wahrnehmung der krummlinigten Bewegung eines Körpers, die

ganz außer uns geschieht, keine andere ihr gleichgeltende statt findet; so muß diese Bewegung eine wahre durch beständige Wurf- und Anziehungskräfte bewirkte, d. i. wirklich seyn.

Zus. 1. Also ist auch jede Axendrehung, die wir an einem einzelnen Körper, z. B. an einem Kräusel, wahrnehmen, wirklich. Z. B. wenn wir auf der Oberfläche eines runden Himmelskörpers einen Flecken gleichförmig fortrücken sehen; so ist seine Bewegung, mithin auch die Axendrehung dieses Weltkörpers wirklich.

Zus. 2. Wenn wir hingegen einen entfernten Weltkörper in einer krummen Linie um uns und um die Erde laufen sehen; so ist entweder die Bewegung des Weltkörpers um die Erde, oder die Bewegung der Erde um ihn nach derselben Richtung wirklich, welche von beyden aber die wirkliche sey, ist an sich unbestimmt. Denn es läßt sich leicht zeigen, daß die Wahrnehmung einerley ist, man mag die Bewegung des Weltkörpers, oder die Bewegung der Erde um ihn als die wirkliche annehmen. So ist es z. B. an sich ganz unbestimmt, ob die Sonne sich jährlich von Westen nach Osten um die Erde, oder die Erde sich in eben der Zeit und nach eben der Richtung mit uns um die Sonne bewege, imgleichen ob der Mond um die Erde, oder die Erde um den Mond laufe.

Zus. 3. Eben so, wenn wir sehen, daß der ganze relative Raum mit allen darin befindlichen Weltkörpern sich täglich von Osten nach Westen um uns herumdrehe, ist es an sich ganz unbestimmt,

ob diese Axendrehung des relativen Raums, oder die Achsendrehung der Erde nach der entgegengesetzten Richtung die wirkliche sey, indem in beyden Fällen die Wahrnehmung ganz dieselbe ist.

Lehrsatz 44.

§. 71. Wenn wir einen Weltkörper A um einen andern B laufen sehen, ohne daß seine Bahn in den folgenden Umläufen merklich verengt wird, so muß nothwendig derjenige der bewegte seyn, der eine kleinere Anziehungskraft besitzt.

Beweis. Denn man setze, beyde hätten eine gleiche Anziehungskraft, der eine aber wäre durch irgend eine Wurfkraft in Bewegung gesetzt; so würde er um denselben zu laufen streben. Da aber beyde eine gleiche Anziehungskraft besitzen; so müssen sich beyde einander unaufhörlich nähern, folglich die vis centripeta in der Bahn des Bewegten unaufhörlich zunehmen, und daher letztere immer enger werden, mithin müßte dieser endlich auf den andern fallen, und so die Bewegung aufhören, also kann die Anziehungskraft beyder nicht gleich groß seyn. Noch weniger aber kann die Anziehungskraft des Bewegten größer seyn, als des andern, denn sonst müßte der letztere endlich auf den erstern fallen. Also muß die Anziehungskraft des Bewegten nothwendig kleiner seyn.

Z. B. Sollte die Sonne sich wirklich in einem Jahr um die Erde bewegen; so müßte, da ihre Bahn sich äußerst wenig ändert, sie eine kleinere Anziehungskraft besitzen, als diese. Läßt sich

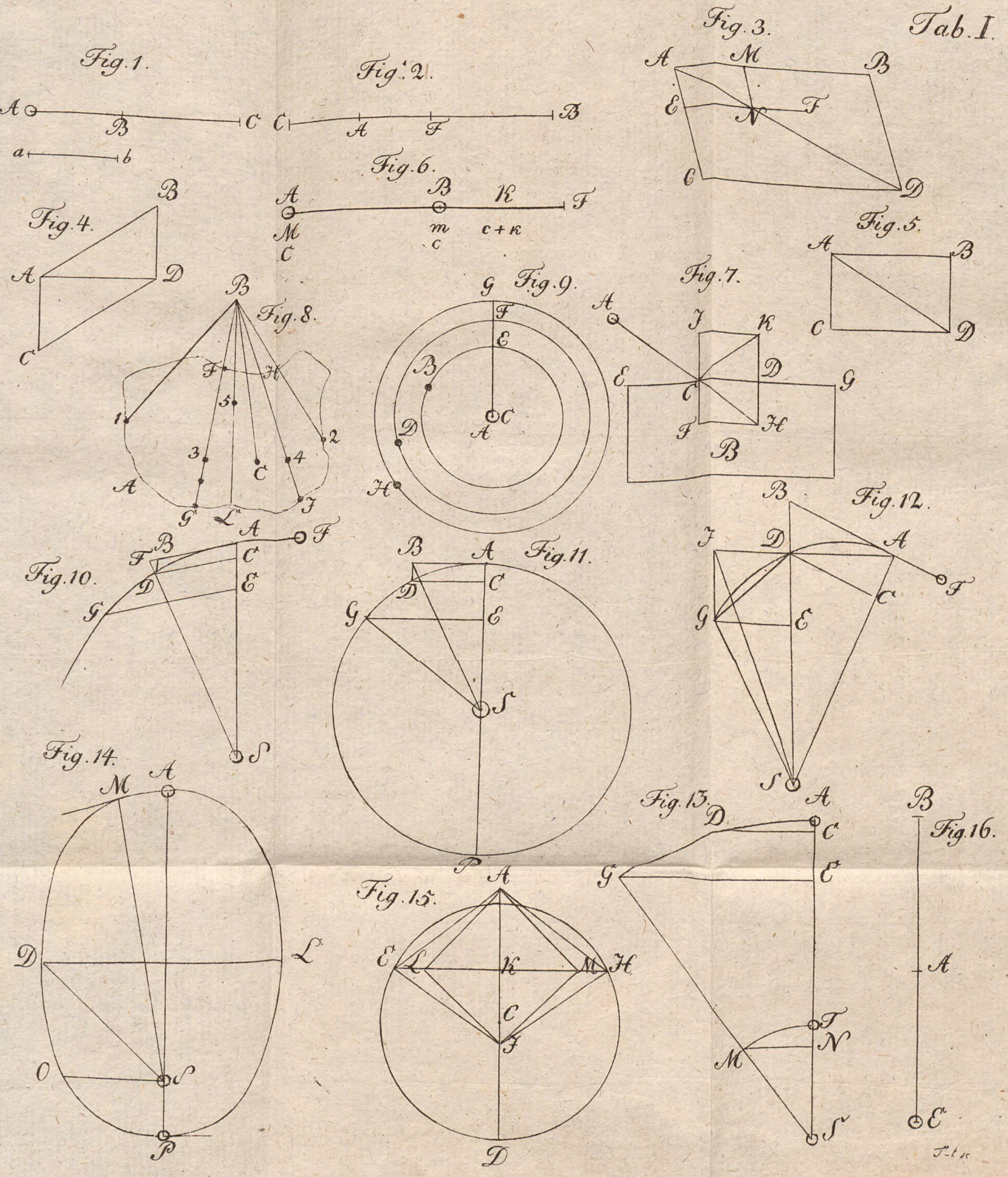
daher das Gegentheil von letzterm beweisen; so ist es apodiktisch gewiß, daß die Sonne sich nicht um die Erde bewegen kann, sondern diese sich schlechterdings um die Sonne bewegen muß.

Zus. Wenn daher innerhalb der Bahn eines Weltkörpers mehrere andere befindlich sind; so muß unter diesen nothwendig derjenige der Centralkörper seyn, auf den sich sein Umlauf eigentlich bezieht, dessen Anziehungskraft vor allen übrigen die stärkste und wirksamste ist. Z. B. innerhalb der Bahn der sogenannten obern Planeten liegen unter andern die Erde, der Mond und die Sonne. Ist daher die Wirkung der Anziehungskraft der Sonne auf jene Planeten größer, als der übrigen innerhalb ihrer Bahn befindlichen; so ist bloß die Sonne der eigentliche Centralkörper, auf welchen sich ihre Bahnen beziehen.

Anmerkung.

Dieser letzte Abschnitt, der eigentlich die Anfangsgründe der Phänomenologie enthält, bestimmt endlich die Lehre von der Bewegung in Ansehung ihrer Modalität, nach allen drey Kategorien derselben, nämlich der Möglichkeit, Wirklichkeit und Nothwendigkeit. Eine Anmerkung, die zwar den Mechaniker nicht als Mechaniker, aber doch so fern interessirt, so fern er über diese Wissenschaft philosophiren will.

Bayerische
Staatsbibliothek
München



Tab. I.
Fig. 1.
A B C
a b
Fig. 2.
C A F B
Fig. 3.
A M B E N F C D
Fig. 4.
B A D C
Fig. 5.
A B C D
Fig. 6.
A B K F
M m c+κ
C c
Fig. 7.
A J K E C D G F H B
Fig. 8.
B F H 1 5 2 3 C 4 A G L J
Fig. 9.
G F E B C D A H
Fig. 10.
B A F F C D E G S
Fig. 11.
B A C D E G S P
Fig. 12.
B J D A F C G E S
Fig. 13.
D A C G E T N M S
Fig. 14.
M A D L O S P
Fig. 15.
A E L K M H C F D
Fig. 16.
B A E

Tab. II.

Fig. 17.

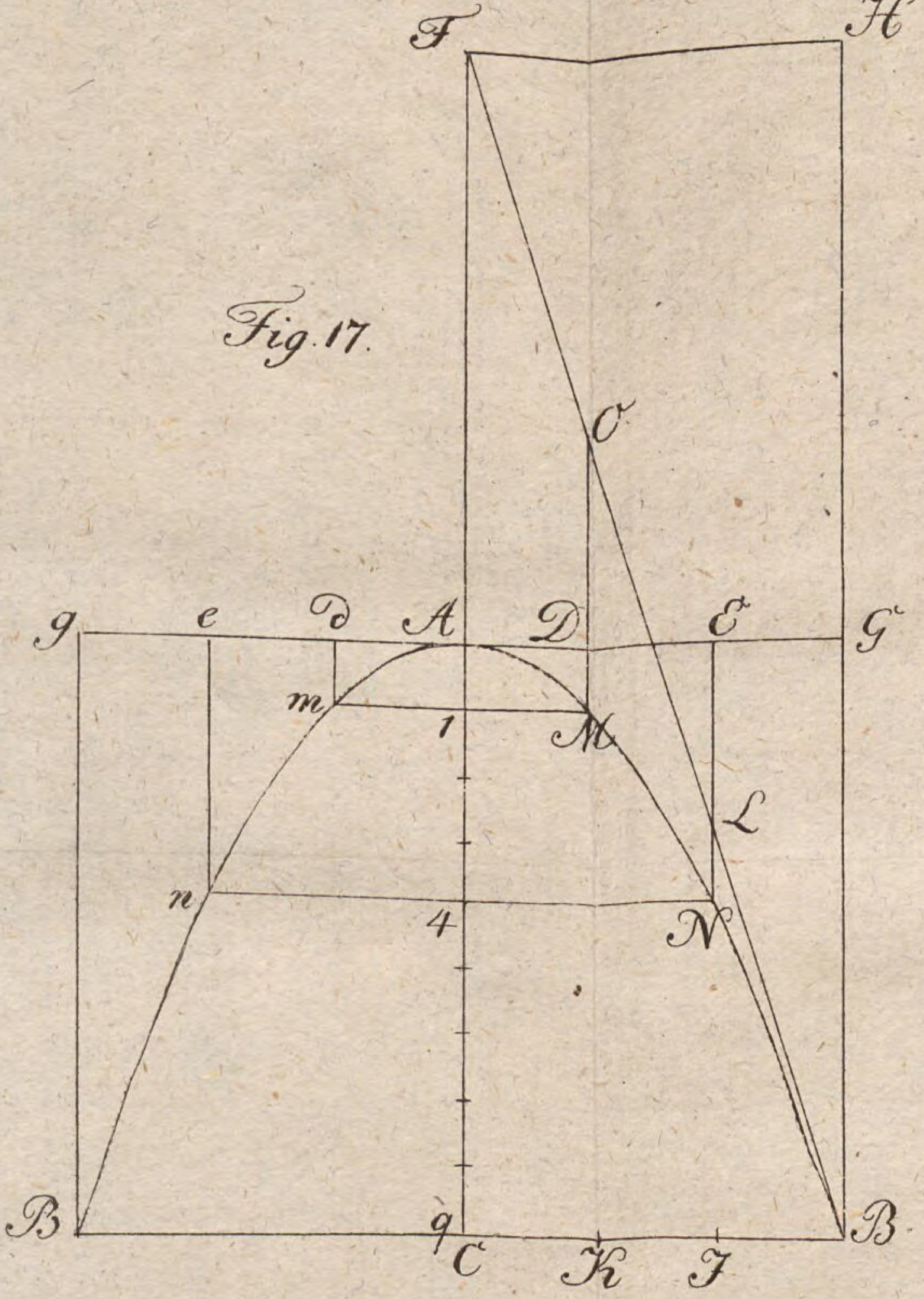


Fig. 18.

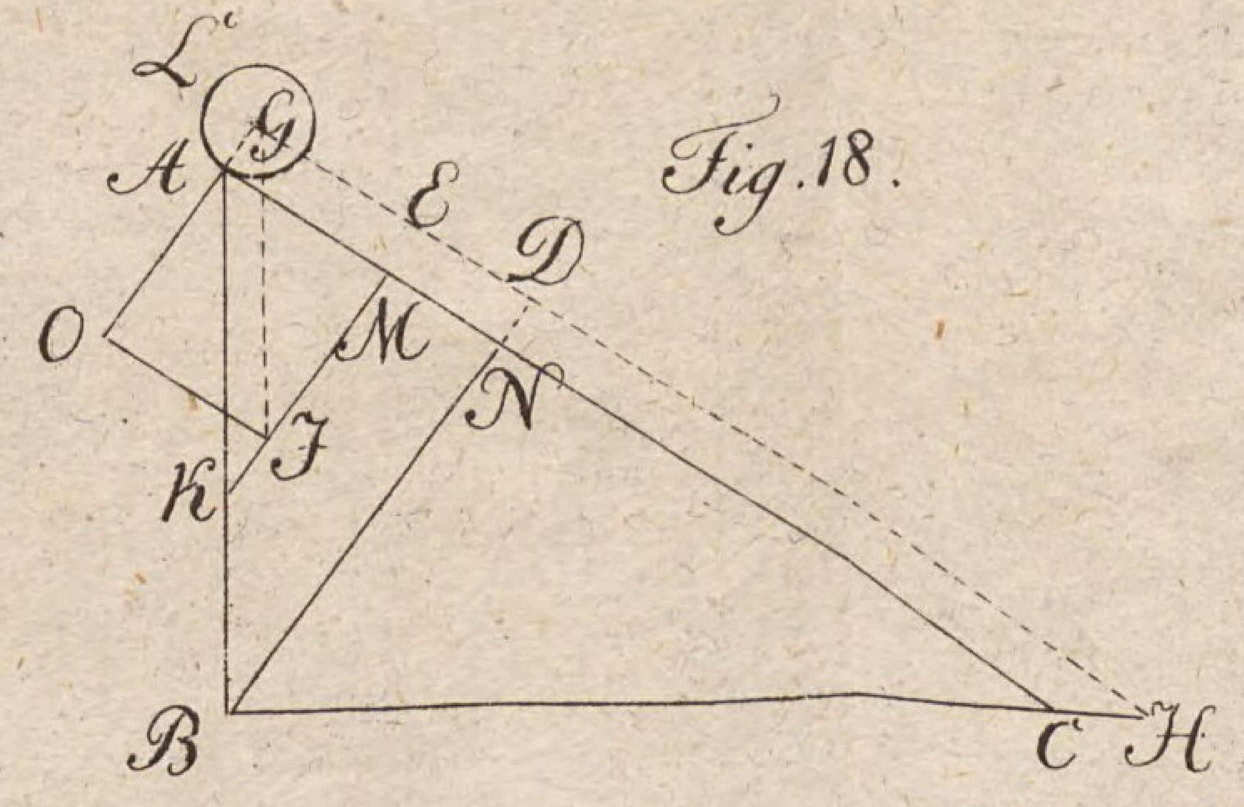


Fig. 19.

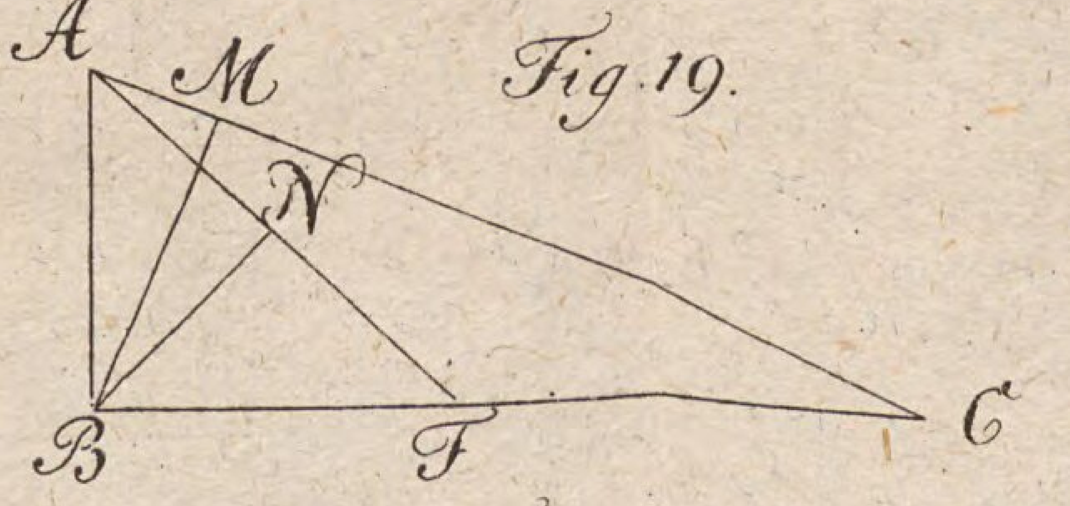


Fig. 20.

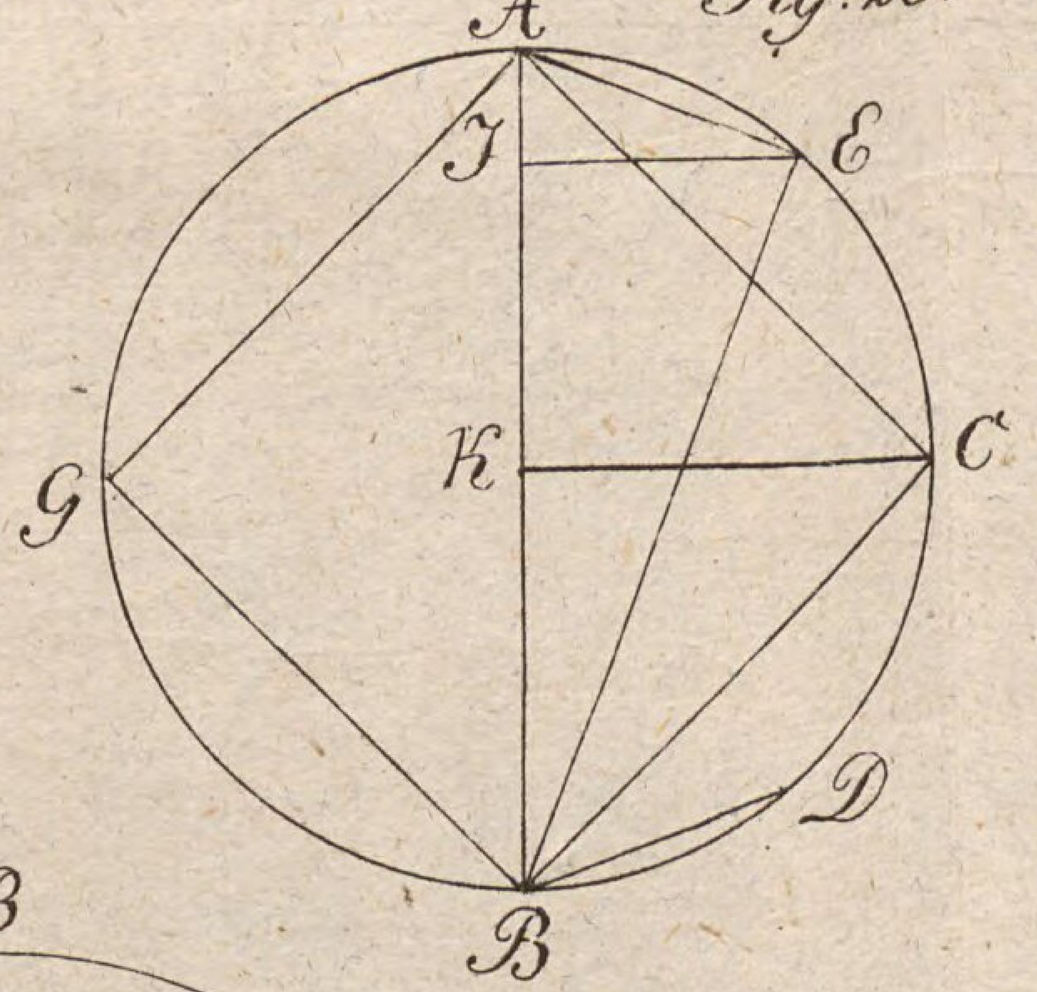


Fig. 21.

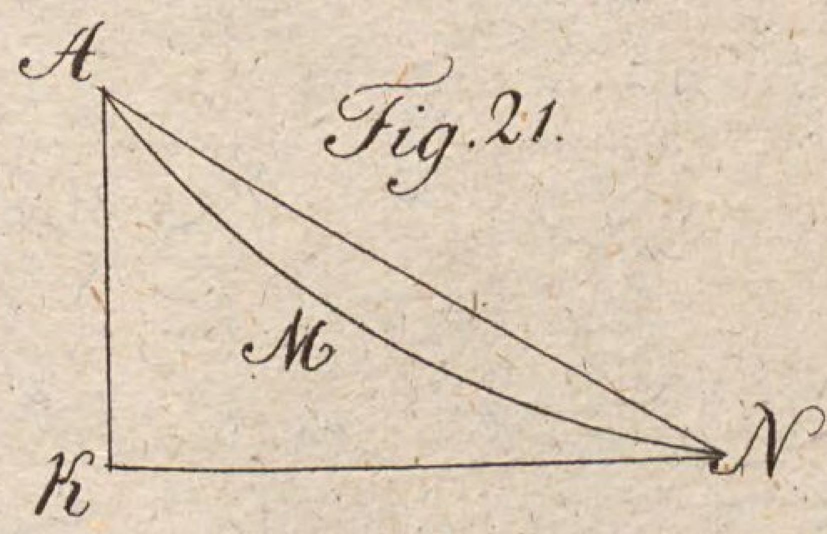


Fig. 22.

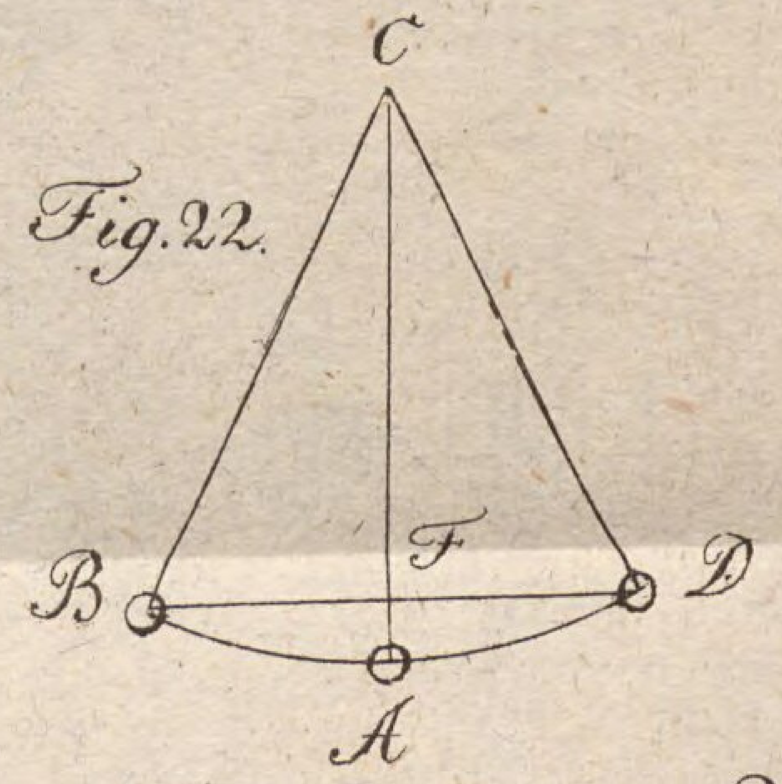


Fig. 23.

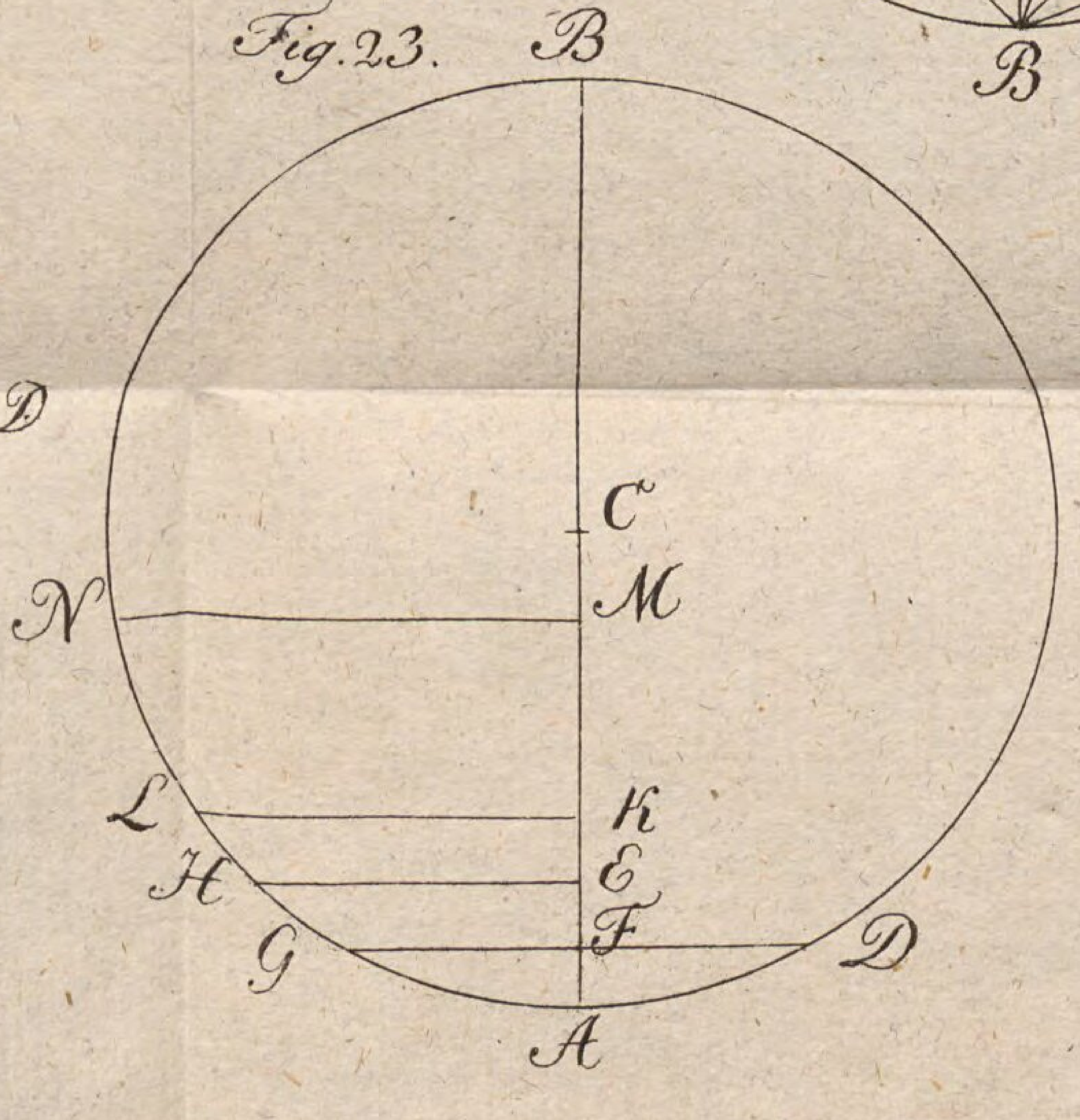
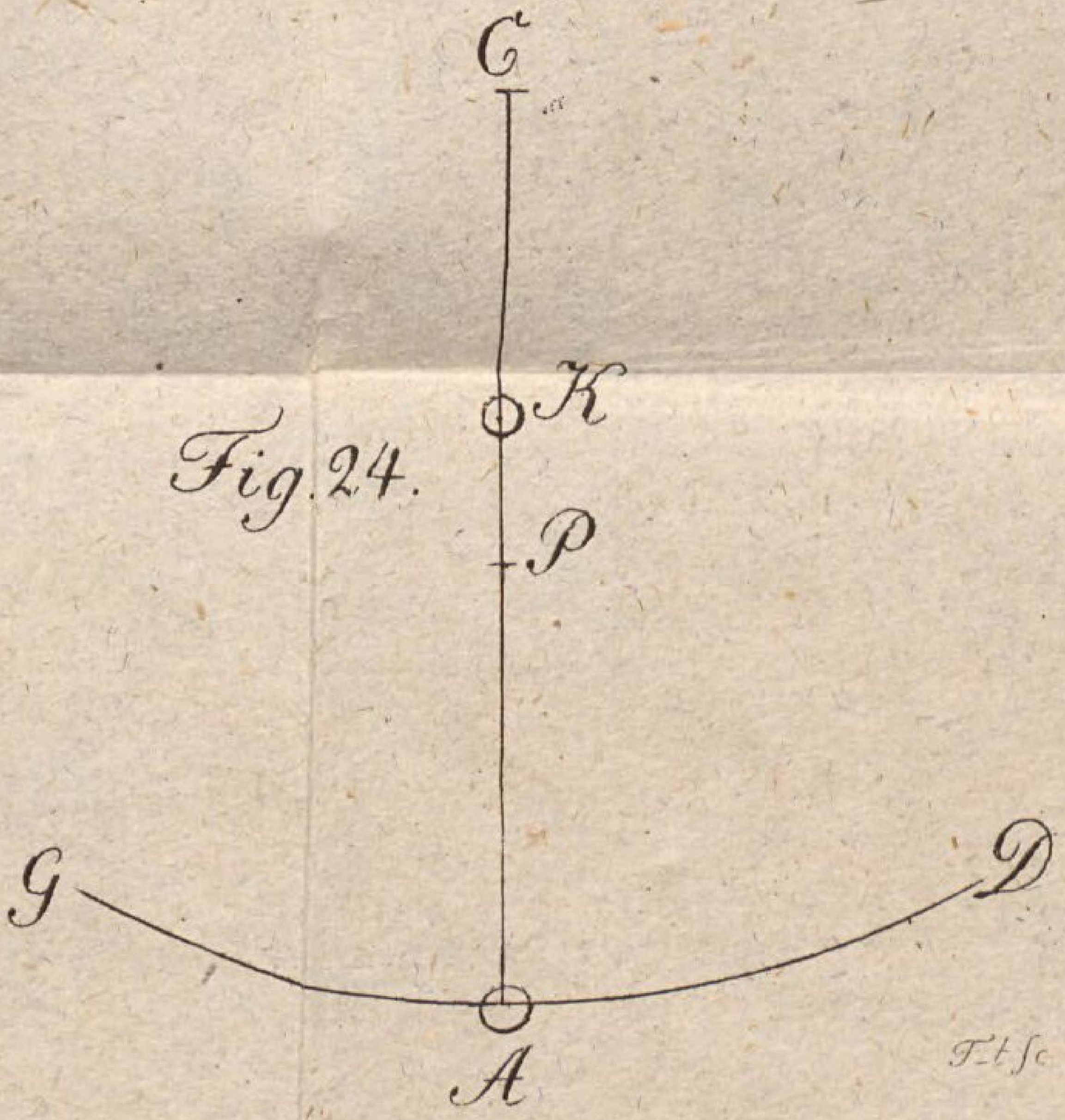


Fig. 24.



Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schultz, Johann

Anfangsgründe der reinen Mechanik

Königsberg 1804

Math.a. 217
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081143-6